

Warszawa, 10.10.2025 r.

Prof. dr hab. Jarosław Mederski,
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Recenzja poprawionej rozprawy doktorskiej
mgra Bogdana Petraszczuka
zatytułowanej

Regularity and Singularities in Nonlinear Elliptic Systems: A Study of n -Harmonic Maps and H -Systems

Niniejsza recenzja dotyczy poprawionej rozprawy doktorskiej mgra Bogdana Petraszczuka zatytułowanej *Regularity and Singularities in Nonlinear Elliptic Systems: A Study of n -Harmonic Maps and H -Systems*, przygotowanej na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego pod kierunkiem prof. dr. hab. Pawła Strzeleckiego.

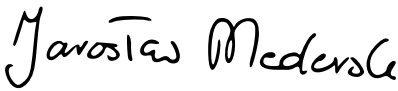
Zapoznałem się z wcześniej przygotowanymi recenzjami, poprawioną wersją rozprawy doktorskiej oraz pisemnym ustosunkowaniem się Doktoranta do recenzji warunkowej prof. Schikorry. Stwierdzam, że wprowadzone poprawki nie zmieniają mojej opinii o pracy. Szczegółowa ocena została zawarta w mojej poprzedniej recenzji, a konkluzja pozostaje pozytywna.

Podkreślam dodatkowo, że wyniki z Rozdziału 3, oparte na samodzielnej pracy autora [41], zostały opublikowane w *Math. Z.* 311 (2025), no. 3, Paper No. 58. Stanowi to istotny argument potwierdzający samodzielność Doktoranta.

Konkluzja (niezmieniona).

Rozprawę oceniam wysoko. Podjęte zagadnienia są trudne i ambitne. Przedstawiona rozprawa doktorska mgra Bogdana Petraszczuka stoi na wysokim poziomie matematycznym i wnosi wartościowy wkład do aktualnej problematyki badawczej dotyczącej regularności przekształceń harmoniczych. Osiągnięcie interesujących i wymagających rezultatów w tej dziedzinie wymaga nie tylko biegłości technicznej, lecz także głębokiego zrozumienia tematyki oraz znajomości literatury publikowanej w czołowych czasopismach matematycznych. Świadczy to o dużym potencjale naukowym Doktoranta.

Dlatego stwierdzam jednoznacznie, że rozprawa spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim.


Jarosław Mederski

Warszawa, 27.02.2025 r.

Prof. dr hab. Jarosław Mederski,
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Bogdana Petraszczuka
zatytułowanej

Regularity and Singularities in Nonlinear Elliptic Systems: A Study of n -Harmonic Maps and H -Systems

Niniejsza recenzja dotyczy rozprawy doktorskiej mgra Bogdana Petraszczuka zatytułowanej *Regularity and Singularities in Nonlinear Elliptic Systems: A Study of n -Harmonic Maps and H -Systems* przygotowanej na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego pod kierunkiem prof. dr. hab. Pawła Strzeleckiego.

Rozprawa została napisana w języku angielskim i składa się z pięciu rozdziałów. Zawiera również streszczenie oraz bibliografię liczącą 42 pozycje.

Rozprawa bazuje na wynikach uzyskanych w następujących dwóch pracach:

- [39] Michał Miśkiewicz, Paweł Strzelecki, Bogdan Petraszczuk: *Regularity for solutions of H -systems and n -harmonic maps with $n/2$ square integrable derivatives*. Nonlinear Analysis **232**, (2023), 113289
- [41] Bogdan Petraszczuk: *Prescribing singularities of weak solutions of a nonlinear elliptic system in the plane*, preprint arxiv.org/abs/2402.09224;

Pierwsza praca opublikowana jest w dobrym czasopiśmie specjalistycznym wspólnie z promotorem i dr. Miśkiewiczem, zaś druga jest samodzielnym preprintem w trakcie oceny w czasopiśmie Mathematische Zeitschrift. Warto zaznaczyć, że pierwsza publikacja została już trzykrotnie cytowana m.in. przez D. Martino i A. Schikorrę w Bull. Lond. Math. Soc. oraz Math. Ann. w 2024 roku. Moim zdaniem doktorant ma dobry dorobek na tym etapie kariery naukowej.

Tematyka rozprawy dotyczy zagadnień odwzorowań harmonicznych i wkład w tę teorię mają światowej klasy matematycy m.in. Bethuel, Brezis, Coron, Eells, Hardt, Iwaniec, Lieb, Lin, Riviere, Schoen, Struwe, Uhlenbeck, Yau i jest rozwijana od kilkunastu lat. Doktorant w rozprawie doktorskiej koncentruje się na zbadaniu regularności słabych rozwiązań $u \in W^{1,n}(B(0,1), \mathbb{R}^m)$ równania

$$(1) \quad -\operatorname{div}(|\nabla u|^{n-2} \nabla u) = F(u, \nabla u),$$

gdzie $B(0,1)$ jest kulą jednostkową w $\mathbb{R}^n$, zaś F jest nieliniowym odwzorowaniem takim, że $|F(u, \nabla u)| \leq C|\nabla u|$ dla pewnej stałej $C > 0$. Szczególny nacisk położono na analizę przekształceń n -harmonicznych oraz H -układów.

Opis rozprawy doktorskiej oraz głównych wyników.

Rozdział 1 wprowadza pojęcia H -układów, regularność odwzorowań n -harmonicznych w słabym sensie i przywołuje klasyczne wyniki m.in. z prac Riviére'a (Acta Mathematica 1995), Strzeleckiego, Torro oraz Wanga z lat 90tych, oraz wynik Martino, Schikorry z ostatnich dwóch lat. Omówiono trzy przypadki: $p > n$, $p < n$ oraz $p = n$, z naciskiem na ten ostatni *krytyczny* przypadek, który pozostaje nierozwiązany dla $n > 2$. Przedstawiono główne wyniki pracy: udowodnienie lokalnej regularności (ciągłości Höldera) rozwiązań H -układów (Twierdzenie 1.0.1) i przekształceń n -harmonicznych (Twierdzenie 1.0.2) w przestrzeniach $W^{n/2,2}$ na kuli jednostkowej $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Wyniki te zawarte są w pracy [39] i dotyczą wymiaru $n > 2$. W przypadku $n = 2$ wiadomo, że nawet ograniczone rozwiązanie równania (1) z analityczną prawą stroną może nie mieć oczekiwanej regularności. Kolejny główny wynik doktoratu (Twierdzenie 1.0.3), to rozszerzenie przykładu Frehse'a z 1973 roku dla jednopunktowych osobliwości na przypadek z dowolnym zwartym zbiorem osobliwości zawartym w kuli $B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$. Jest to wynik z pracy autora [41], pokazujący istnienie rozwiązania osobliwego na tym zadanym zbiorze. W tym rozdziale znajdziemy cele rozprawy, które są ambitne i dobrze przedstawione oraz zachęcają do dalszej lektury.

Kolejny Rozdział 2 stanowi wprowadzenie do kluczowych pojęć i przedstawia narzędzia matematyczne wykorzystywane w pracy. Omówiono standardowe i ułamkowe przestrzenie Sobolewa, przestrzenie BMO i Hardy'ego oraz ich właściwości. Szczególną uwagę poświęcono nierówności Gagliardo–Nirenberga z czynnikiem BMO udowodnioną przez Strzeleckiego (Bull. London Math. Soc. (2006)) oraz narzędzie analityczne jakim jest dekompozycja Riviére–Uhlenbecka, które będą wykorzystywane w kolejnych rozdziałach.

W Rozdziale 3 autor rozwija przykład Frehse'a (Math. Z. (1973)), wykazując, że osobliwości rozwiązania równań eliptycznych typu (1) mogą występować w dowolnie zadanym zbiorze zwartym. Mianowicie, mgr Petraszczuk udowadnia, że dla dowolnego zwartego podzbioru $K \subset B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$, istnieje rozwiązanie $u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^2) \cap L^\infty$, które jest osobliwe na K i gładkie poza nim. Prawa strona równania (1) zadana jest wzorem (3.0.2) z pracy Frehse'a, zaś lewa staje się operatorem Laplace'a dla $n = 2$. Rozwiązanie u jest granicą ciągu postaci

$$u^N := (\sin(\log f_N), \cos(\log f_N)),$$

gdzie

$$f_N(x) = \sum_{i=1}^N a_i \log \left(\frac{1}{|x - p_i|} \right),$$

zaś $\{p_i : i = 1, \dots, \infty\}$ jest gęstym i przeliczalnym podzbiorem K . Zbiór osobliwości może być kontrolowany poprzez odpowiedni dobór $\{p_i\}$ i $\{a_i\}$, co umożliwia precyzyjne rozmieszczenie punktów nieciągłości. Jeśli $N = 1$ to u^1 pokrywa się z konstrukcją Frehes'a. Autor udowadnia, że u^N spełnia równanie poza zbiorem $\{p_i : i = 1, \dots, N\}$ i analizując ciągi (a_n) pokazuje, że $u \in W^{1,2}(B(0,r)) \cap L^\infty(B(0,r))$ jest poszukiwanym rozwiązaniem w słabym sensie. Kluczowym tutaj elementem dowodu jest dekompozycja funkcji testowych φ na części odpowiadające osobliwościom i obszarom gładkim. Jest to rozdział bazujący na samodzielnej pracy autora [41].

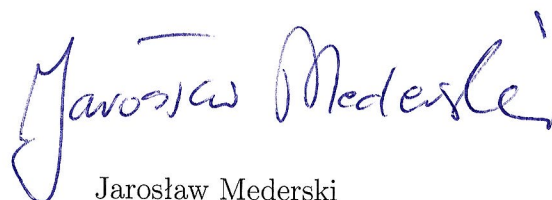
Rozdział 4 skupia się na badaniu regularności lokalnej rozwiązań H -układów w przestrzeniach Sobolewa $W^{n/2,2}(B(0,1), \mathbb{R}^{n+1})$. Autor rozważa układy eliptyczne z ograniczonymi funkcjami H spełniającymi warunek Lipschitza. Podstawowym wynikiem jest dowód, że rozwiązania (1) dla H -układów są lokalnie Hölderowskie. Kluczowym elementem analizy jest zastosowanie dekompozycji Hodge’a i wykorzystanie nierówności Sobolewa z czynnikiem BMO. Rozdział zawiera szereg technicznych i wymagających kroków, które opierają się na wynikach opublikowanych w pracy [39].

Rozdział 5 poświęcony jest przekształceniom n -harmonicznym, które są słabymi rozwiązaniami $u \in W^{n/2,2}(B(0,1), \mathcal{N})$ równania (1) z krytycznym wzrostem. $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N}$ jest rozmaitością riemannowską izometrycznie zanurzoną w $\mathbb{R}^m$. Głównym rezultatem jest udowodnienie, że przekształcenia n -harmoniczne spełniają lokalną regularność Hölderowską. Autor stosuje zaawansowane narzędzia analizy funkcjonalnej, w tym antysymetryzację drugiej formy fundamentalnej rozmaitości $\mathcal{N}$, oraz dekompozycję Hodge’a i Riviére-Uhlenbecka. Rozdział zawiera również szczegółową analizę stabilności dekompozycji Hodge’a bazując na wynikach Iwańca (Ann. of Math. (1992)) oraz Iwańca i Sbordonę’a (J. Reine Angew. Math. (1994)). Podstawą tych badań jest współautorska publikacja [39].

Reasumując, główne i najciekawsze wyniki rozprawy doktorskiej zawarte są w Rozdziałach 3–5. Autor zaprezentował i zastosował zaawansowane techniki analizy regularności rozwiązań układów eliptycznych oraz przekształceń n -harmonicznych. Wyniki z Rozdziałów 4 i 5 spotkały się z zainteresowaniem środowiska matematycznego, m. in. Martino i Schikorra uogólnili je w pracy Math. Ann. w 2024 roku. Pod względem redakcyjnym, rozprawa zawiera literówki, niekonsekwentne oznaczenia, braki/błędy w spisie literatury, których nie będę wskazywał szczegółowo, gdyż nie wpływają na prawdziwość głównych twierdzeń.

Konkluzja. Rozprawę oceniam wysoko. Zagadnienia są trudne, ambitne i stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska mgra Bogdana Petraszczuka jest na wysokim poziomie matematycznym, wnosi wartościowy wkład do aktualnej problematyki badawczej dotyczącej regularności przekształceń harmonicznych. Osiągnięcie interesujących i wymagających wyników w tej dziedzinie wymaga nie tylko biegłości technicznej, ale także głębokiego zrozumienia tematyki oraz prac, które publikowane są w bardzo dobrych czasopismach. Świadczy to o dobrym potencjale naukowym doktoranta. Dlatego stwierdzam jednoznacznie, że rozprawa spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim.

Wnoszę o dopuszczenie mgra Bogdana Petraszczuka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Jarosław Mederski