

Recenzja pracy doktorskiej B. Petraszczuka. Raz jeszcze.

Poniższa recenzja powinna być traktowana jako dodatek do mojej recenzji doktoratu B. Petraszczuka z dn. 10.01.2025r.

B. Petraszczuk przygotował poprawki do swojej rozprawy doktorskiej. Składały się one z poprawek dotyczących uwag prof. Schikorry związanych ze szczegółami rozdziału trzeciego oraz poprawek związanych z moimi uwagami.

Już w poprzedniej recenzji wnioskowałem o dopuszczenie mgra Petraszczuka do kolejnych etapów przewodu doktorskiego. Teraz, po dokonanych zmianach, robię to z jeszcze większym przekonaniem. Uważam, że rozprawa spełnia wszelkie ustawowe oraz zwyczajowe wymagania i wnioskuję o dopuszczenie autora do kolejnych etapów przewodu doktorskiego.

W ramach poprawek autor usunął błędy z części wprowadzającej, m. in. rozkład Helmholtza jest teraz zaprezentowany prawidłowo. Autor dokonał też poprawek, o które wnioskował prof. Schikorra, ja nie miałem wątpliwości co do tego z tego rozdziału, ich prezentacja także wydawała mi się wystarczająco jasna.

Wreszcie, w uwadze 4.0.4 autor odniósł się do mojej największej wątpliwości. Jestem tym odniesieniem usatysfakcjonowany, teraz rozumiem szczegóły dowodu.

Oceniam rozprawę pozytywnie i przygotowuję pytania na obronę.



Tomasz Cieślak, Warszawa, dn. 28.10.2025r.

Recenzja pracy doktorskiej mgra Bogdana Petraszczuka pt. Regularność i osobliwości w nieliniowych eliptycznych układach równań cząstkowych: mapy n -harmoniczne i H układy.

Mgr Bogdan Petraszczuk przedstawił rozprawę doktorską napisaną pod kierunkiem Pawła Strzeelckiego w szkole doktorskiej Uniwersytetu Warszawskiego. Rozprawa dotyczy, z jednej strony regularności rozwiązań H układów oraz map n -harmonicznych, z drugiej podaje przykład osobliwego rozwiązania pewnego konkretnego układu równań cząstkowych. Poza rozdziałem wprowadzającym, rozprawa składa się z czterech części. Najbardziej obfity jest rozdział wprowadzający znane pojęcia i wyniki, którymi autor posługuje się w regularnościowej części pracy, to rozdział drugi. Następnie, w rozdziale trzecim autor przedstawia przykład rozwiązania układu wprowadzonego przez Frehsego, które jest osobliwe na dowolnym zwartym podzbiorze pewnej niedużej kulki. Ten rozdział oparty jest na autorskiej publikacji. Wreszcie, w czwartej części pracy mamy dowód hölderowskiej ciągłości rozwiązania H układu, które a priori jest $W^{n/2,2}$ regularne. Ten rozdział, podobnie jak ostatni rozdział piąty, traktujący o hölderowskiej ciągłości n harmonicznej mapy, która a priori jest $W^{n/2,2}$ regularna, jest wynikiem współpracy B.Petraszczuka z promotorem oraz Michałem Miśkiewiczem.

W pierwszej części recenzji omówię wyniki uzyskane przez kandydata. Zacznę od rozdziału trzeciego, następnie omówię rozdziały czwarty i piąty, aby na koniec odnieść się do rozdziału drugiego. W ostatniej części recenzji przedstawię swoją opinię o pracy oraz konkluzję w kwestii dopuszczenia autora do kolejnych etapów przewodu doktorskiego.

W rozdziale trzecim B.Petraszczuk pokazuje, że układ równań

$$(1) \quad \Delta u = F(u, \nabla u),$$

gdzie $u = (u_1, u_2)$, $F(u, \nabla u) := \left(-2 \frac{u_1 + u_2}{1 + |u|^2} |\nabla u|^2, 2 \frac{u_1 - u_2}{1 + |u|^2} |\nabla u|^2 \right)$, na dziedzinie, która jest odpowiednio małą kulą na płaszczyźnie, dla dowolnego zwanego podzbioru K dziedziny, posiada słabe rozwiązanie, które jest nieciągłe na K . Zaprezentowany wynik, z samodzielnej pracy, to modyfikacja przykładu z 1972 roku pochodzącego od Jensa Frehse. Modyfikacja to nietrywialne przekształcenie jawnego wzoru na rozwiązanie uzyskanego przez J.Frehsego, dzięki któremu autor jest w stanie sprawdzić, że mamy do czynienia ze słabym rozwiązaniem (1), które jest odpowiednio nieregularne.

Przykład bazuje mocno na pomysłe Frehsego. O ile w 1972 roku przykład Frehsego był głosem w kwestii ewentualnej osobliwości map harmonicznych, o tyle dziś, kiedy od pracy Heleina z 1991 roku wiemy już, że mapy słabo harmoniczne w dwóch wymiarach są ciągłe, układ równań (1) traci swoje

znaczenie jako układ pomocniczy, a sam nie jest skupiającym uwagę obiektem badań.

Rozdziały czwarty i piąty, oparte na wspólnej publikacji z P.Strzeleckim i M.Miśkiewiczem, to twierdzenia o hölderowskiej ciągłości słabych rozwiązań (a priori klasy $W^{n/2,2}$) H układu (rozdział 4) oraz map n harmonicznych (rozdział 5) w wymiarach $n > 2$. Oba te rozdziały są w moim przekonaniu bardziej interesujące niż rozdział trzeci. Oba wpisują się w nurt współczesnych badań. Choć delikatnie zaznaczę, że w moim przekonaniu, to mapy harmoniczne są bardziej naturalnym obiektem do badania od map n harmonicznych czy H układów. Natomiast, rozdziały czwarty i piąty wymagają od autora swobodnego operowania bardzo trudnymi i subtelnymi metodami i oszacowaniami. Większość materiału, który potrzebny jest w tych rozdziałach, opisana jest w rozdziale drugim, o którym za chwilę. Powinienem zaznaczyć, że rozdziały czwarty i piąty pochodzą ze wspólnej pracy autora ze specjalistami w dziedzinie map harmonicznych, którzy bardzo biegle posługują się wykorzystanymi trudnymi pojęciami. To utrudnia ocenę wkładu autora i generuje wiele naturalnych pytań na obronę.

Pozwolę sobie pokrótce opisać strategię dowodu hölderowskiej ciągłości z rozdziału czwartego i wspomnieć o koniecznych modyfikacjach w rozdziale piątym. Sama hölderowska regularność uzyskana jest jako konsekwencja oszacowania tempa wygasania gradientu rozwiązania na kulkach. Uzyskanie takiego wyniku wymaga kilku nietrywialnych kroków. I tak w czwartym rozdziale autor najpierw przygotowuje odpowiednią funkcję testującą (już na tym poziomie przydatny jest lemat Iwańca o stabilności rozkładów Weyla). Następnie, uzyskane jest oszacowanie wielkości

$$(2) \quad \int_{B(a,r)} |\nabla u|^{n-\epsilon}$$

dzięki, po pierwsze podparciu nią od dołu lewej strony H układu. To wymaga użycia wcześniej przygotowanej funkcji testującej. Ale procedura jest bardziej wymagająca, wykorzystuje się tam ponownie lemat Iwańca. Następnie, bardziej skomplikowany i nie tak elegancki argument pozwala znaleźć oszacowanie prawej strony H układu przez pewną wielkość związaną z (2). Ostatnia procedura to żmudne i mocno nietrywialne rachunki, które używają m. in. lematu komutacyjnego Coifmana-Rochberga-Weissa, dualności Feffermana czy nierówności interpolacyjnych z członem z BMO. Wreszcie, na stronie 92 pewien bootstrapping prowadzi do oszacowań typu Campanato i hölderowskiej ciągłości.

Rozdział piąty bazuje na szacowaniu tej samej wielkości (2). Jest jednak jeszcze bardziej skomplikowany. Tym razem potrzeba dodatkowo użyć pewnej formy rozkładu Uhlenbeck-Riviere'a, potrzebny jest też rozkład Hodge'a (pracujemy na formach różniczkowych) i wzmocnienie lematu komutacyjnego z pracy Iwańca i Sbordone.

Mam dwie krytyczne uwagi do tej części pracy: nie rozumiem trzeciej nierówności w (4.0.17). Zdaje się, że szacujemy tam $\int |\phi|^{\frac{n-\epsilon}{1-\epsilon}}$ przez $\int |\phi -$

$[\phi]^{\frac{n-\epsilon}{1-\epsilon}}$. Czy nierówność zachowa się po odjęciu średniej przez jakieś specjalne własności ϕ czy może istotny jest tu fakt, że powyższe całki są po różnych zbiorach? Ponadto, na początku dowodu Lematu 4.0.5 autor pisze o dwóch funkcjach testujących ζ i ζ_1 . Ale potem w dowodzie jest chyba użyta tylko jedna z nich?

Na koniec chciałbym jeszcze powiedzieć o rozdziale drugim. Mgr Petraszczyk podejmuje wysiłek wprowadzenia czytelnika doktoratu w ciekawe i nietrywialne metody analizy konieczne w studiowaniu map harmonicznych. Z jednej strony mamy opisany pomysł Heleina antysymetryzacji prawej strony równania, który to był podstawą, wraz z $BMO - H^1$ div-curl lematem, uzyskania ciągłości map słabo harmonicznych. Jest podrozdział poświęcony przestrzeniom Hardy'ego, nierównościom interpolacyjnym z BMO . Mamy przedstawienie lematu komutacyjnego Coifmana-Rochberga-Weissa oraz opisany trik Iwańca. Wreszcie, jest opisana trudna i nietrywialna konstrukcja rozkładu Uhlenbeck-Riviere'a. Mam jednak kilka uwag krytycznych, gdyż wydaje mi się, że autor nie ustrzegł się kilku niedociągnięć (choć ten rozdział ogólnie bardzo mi się podoba).

Po pierwsze, na stronach 41, 42, kiedy autor pisze o rozkładzie Hodge'a, na str. 42 jest uwaga, że w przypadku rozkładu Helmholtza (czyli dla $p = 2$) części bezdywergencyjna i gradientowa są ortogonalne. To nie jest prawda dla obszarów ograniczonych bez ustalonych (bardzo konkretnych) warunków brzegowych. R we wzorze (2.6.17) nie jest zdefiniowane. Gdy mowa o formach różniczkowych, we wzorze (2.6.30), operacja δ nie jest zdefiniowana. We wzorze (2.6.6) brakuje $\times \partial_{x_3} u$ po lewej stronie. We wzorze (2.5.31) suma powinna chyba być do m , a nie n . Wreszcie, nie rozumiem dlaczego autor wyciąga normę L^∞ atomu a_k przed całkę w (2.3.11). Atomy zdefiniowane są na stronie 26, zgodnie z definicją nie muszą być ograniczone.

Odpowiednia ustawa nakazuje stwierdzić, w przypadku pozytywnej opinii o rozprawie, problem badawczy rozwiązany przez autora. Jeśli myśleć o wynikach rozdziału trzeciego, samodzielnej pracy autora, to oczywiście można by uznać, że problemem badawczym było uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy układ (1) może posiadać rozwiązania, które są osobliwe na większych zbiorach. Na tak postawione pytanie autor odpowiada. Mnie jednak nie do końca przekonuje, że warto stawiać taki problem badawczy w roku 2020. Układ Frehsego był interesujący przed wynikiem Heleina. Dziś pytanie o wielkość osobliwości w (1) jest umiarkowanie interesujące.

Niewątpliwie jednak kwestia regularności słabych rozwiązań H układów czy map n harmonicznych to jest aktualny problem badawczy. Praca kandydata zawiera wyniki odpowiadające na takie pytanie. Są to wyniki wspólne, to prawda, ale myślę, że te wyniki oraz samodzielny wynik na mniej interesujący temat, to wystarczająco dużo, aby wnioskować o dopuszczenie mgra Petraszczyka do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Zatem wnioskuję o dopuszczenie kandydata do kolejnych kroków w przewodzie doktorskim.



Warszawa, dn. 10.01.2025r.
dr hab. Tomasz Cieślak