



ZAGADNIENIA NA EGZAMIN LICENCJACKI

ANALIZA MATEMATYCZNA

- Teoria aksjomatyczna. Aksjomatyka liczb rzeczywistych. Aksjomat ciągłości, kresy.
- Zasada indukcji zupełnej. Nierówność Bernoulliego, nierówności między średnimi. Pojęcie zbioru gęstego.
- Granica ciągu: definicja, jednoznaczność, własności arytmetyczne, twierdzenie o trzech ciągach
- Zbieżność ciągów monotonicznych. Podciągi i twierdzenie Bolzano-Weierstrassa
- Twierdzenie Stolza. Funkcja wykładnicza i logarytm (w dziedzinie rzeczywistej).
- Szeregi o wyrazach dodatnich. Warunki konieczne i dostateczne zbieżności, przykłady
- Zbieżność warunkowa i bezwzględna. Kryterium Abela i Dirichleta.
- Mnożenie szeregów. Funkcja wykładnicza w dziedzinie zespolonej.
- Sinus i cosinus w dziedzinie zespolonej. Liczba π .
- Granica funkcji. Granice jednostronne.
- Ciągłość. Własność Darboux i twierdzenie Weierstrassa. Wzmianka o jednostajnej ciągłości.
- Wypukłość i jej różne charakteryzacje. Nierówność Jensena.
- Pochodna: definicja i własności.
- Lemat Fermata, twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Wnioski, przykłady.
- Pochodne wyższych rzędów i wzór Taylora.
- Metoda stycznych.
- Szeregi potęgowe. Wzór Cauchy'ego-Hadamarda, ciągłość i różniczkowalność sumy szeregu potęgowego, przykłady.
- Funkcja pierwotna. Całka nieoznaczona.
- Całka oznaczona (Newtona, Riemanna) definicja i interpretacja geometryczna. Długość krzywej.
- Różne zastosowania całki oznaczonej.
- Topologia przestrzeni euklidesowej. Norma, metryka, ciągłość funkcji wielu zmiennych rzeczywistych.
- Pochodne cząstkowe i kierunkowe. Różniczka. Interpretacja geometryczna, przykłady.
- Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Wzór Taylora. Warunki dostateczne ekstremów. Przykłady punktów krytycznych.
- Co to jest teoria miary i po co nam ona w ogóle? Przykład Vitaliego, σ -ciała, pojęcie miary zewnętrznej i miary.



- Miara Lebesgue'a: definicje, charakteryzacja, własności. Funkcje mierzalne.
- Teoria całki Lebesgue'a. Ogólna definicja całki. Twierdzenia o zbieżności.
- Całkowanie przez podstawienie. Twierdzenie Fubinię. Sens geometryczny, przykłady zastosowań.

GEOMETRIA Z ALGEBRĄ LINIOWĄ

- Grupy. Ciała. Liczby zespolone, postać trygonometryczna, wzór de Moivre'a, pierwiastki z jedności, pierwiastki z liczby zespolonej.
- Wielomiany, zasadnicze tw. algebry (bez dowodu).
- Macierze o współczynnikach z ciała. Działania na macierzach.
- Przestrzenie liniowe nad ciałem, podprzestrzeń liniowa, liniowa niezależność, baza, wymiar. Przykłady baz. Część wspólna, suma, suma prosta podprzestrzeni.
- Obraz, jądro i rząd macierzy. Macierze odwracalne.
- Układy równań liniowych. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Opis zbioru rozwiązań. Eliminacja Gaussa.
- Wyznaczniki i ich własności. Wzory Cramera.
- Przekształcenia liniowe i funkcjonały. Macierz przekształcenia liniowego. Rząd, obraz i jądro przekształcenia liniowego oraz macierzy. Izomorfizm przestrzeni liniowych.
- Przestrzeń sprzężona, bazy sprzężone, macierz zmiany bazy, związek z przekształceniami liniowymi.
- Podobieństwo macierzy. Wartość własna, wektor własny, widmo macierzy/przekształcenia liniowego. Wielomian charakterystyczny. Diagonalizacja przekształcenia liniowego/macierzy. Informacja o tw. Jordana.
- Przestrzenie euklidesowe/unitarne. Iloczyn skalarny, norma euklidesowa, pojęcie kąta. Baza ortogonalna/ortonormalna, tożsamość Parsewala. Ortogonalizacja Grama-Schmidta. Dopełnienie ortogonalne i rozkład ortogonalny przestrzeni, rzut ortogonalny. Izometrie, macierze ortogonalne/unitarne.
- Formy hermitowskie i symetryczne. Przystawanie macierzy. Diagonalizacja macierzy symetrycznych/hermitowskich. Kryterium Sylwestera.



PODSTAWY MATEMATYKI

- Rachunek zdań i jego własności. Wprowadzenie do rachunku kwantyfikatorów.
- Operacje na zbiorach, w tym działania nieskończone.
- Relacje i funkcje oraz ich podstawowe własności.
- Relacja równoważności, zasada abstrakcji.
- Liczby naturalne. Zasada indukcji.
- Równoliczność. Zbiory skończone i nieskończone, przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Twierdzenie Cantora i twierdzenie Cantora-Bernsteina.
- Porządki częściowe i liniowe. Kresy. Zastosowania lematu Kuratowskiego - Zorna.
- Porządki dobre i dobrze ufundowane. Indukcja.
- Pojęcie dowodu formalnego. Systemy dowodzenia dla rachunku zdań, twierdzenie o pełności.

MATEMATYKA DYSKRETNA

- Indukcja matematyczna i rekurencja.
- Sumy skończone.
- Współczynniki dwumianowe.
- Permutacje i podziały.
- Funkcje tworzące i ich zastosowania.
- Metody zliczania (enumeratory, zasada włączania-wyłączania).
- Asymptotyka (notacja O , Ω , Θ , o , ω , twierdzenie o rekurencji uniwersalnej).
- Elementarna teoria liczb (podzielność, liczby pierwsze, rozkład na czynniki pierwsze, NWD i algorytm Euklidesa).
- Arytmetyka modularna (małe twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera, chińskie twierdzenie o resztach, rozwiązywanie równań modularnych).
- Elementy kryptografii: test Millera-Rabina i system RSA.
- Teoria Polyi: zastosowanie teorii grup w kombinatoryce.
- Grafy: ścieżki, drzewa i cykle, cykle Eulera i Hamiltona, grafy dwudzielne, skojarzenia i twierdzenie Halla, planarność, kolorowanie grafów.



WSTĘP DO PROGRAMOWANIA

- Pojęcie algorytmu i dziedziny algorytmicznej.
- Podstawy języka programowania: notacja do opisu składni języka (np. gramatyki bezkontekstowe lub BNF), pojęcie składni i semantyki, wyrażenia arytmetyczne (liczby całkowite i zmiennopozycyjne), wyrażenia logiczne, znaki i napisy, zmienne, ich typ, instrukcja przypisania, definiowanie i wywoływanie funkcji, instrukcja warunkowa, pętla while, pętla for, instrukcja wyboru, znaki i napisy, wczytywanie i wypisywanie.
- Reprezentacja liczb całkowitych i zmiennopozycyjnych, pojęcie zakresu i błędów zaokrągleń.
- Dekompozycja problemu i weryfikacja programów: specyfikacja problemu, warunek początkowy i końcowy, częściowa poprawność i własność stopu, asercje, formuły Hoare'a, niezmienniki pętli, własność stopu i metody jej dowodzenia, uzasadnianie poprawności programów.
- Typy danych: tablice, struktury, unie, deklaracje typów, reguły zgodności typów.
- Pliki: nośniki pamięci, pliki tekstowe, mechanizm buforowania, standardowe wejście i wyjście jako strumienie.
- Przydatne narzędzia i technalia: makrodefinicje i pre-processing, definicje stałych, typy wyliczeniowe, przydatne typy danych.
- Typy wskaźnikowe: pojęcie wskaźnika, dereferencja, przekazywanie argumentów (i wyników) przez wartość, wskaźnik i referencję, zmienne globalne i lokalne, pamięć alokowana dynamicznie, smart pointers -- wskaźniki unikalne i współdzielone.
- Modularyzacja i bariery abstrakcji: pliki nagłówkowe i implementacja.
- Rekurencja: rekurencja i jej sposób implementacji, rekurencyjne wyrażanie problemów, weryfikacja programów rekurencyjnych, analiza programów rekurencyjnych.
- Analiza złożoności algorytmów: rachunek rzędów funkcji, koszty algorytmu (czasowy i pamięciowy, pesymistyczny i średni), rozmiar danych, koszt zamortyzowany.
- Metoda "dziel i rządź": metoda inkrementacyjna, podział binarny, w tym wyszukiwanie binarne, przykłady - algorytmy sortowania.
- Dynamiczne struktury danych: typy wskaźnikowe, wskaźnikowa realizacja list, podstawowe operacje na listach, listy jednokierunkowe, dwukierunkowe i cykliczne, stopy i kolejki, atrapy i strażnicy.
- Drzewa: drzewa binarne, BST, implementacja drzew dowolnego rzędu, obiegi drzew.
- Przydatne biblioteczne struktury danych: słowniki (mapy), tablice haszujące, zbiory, kolejki, stopy.
- Programowanie z nawrotami: przeszukiwanie pełnej przestrzeni stanów, heurystyki przyspieszające, ucinanie rekursji.
- Programowanie dynamiczne: metoda spamiętywania, tablicowanie, programowanie dynamiczne na drzewach.
- Programowanie zachłanne: algorytm Huffmana.



- Przeszukiwanie grafów: implementacja macierzowa i listowa grafów, przeszukiwanie wszerz, przeszukiwanie w głąb, algorytm Floyda-Warshalla.

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

- Podstawowe zasady analizy algorytmów.
- Metody projektowania wydajnych algorytmów.
- Sortowanie.
- Selekcja.
- Kolejki priorytetowe.
- Wyszukiwanie i słowniki.
- Problem "Find-Union" i jego zastosowania.
- Algorytmy grafowe.
- Wyszukiwanie wzorca w tekstach.
- Tekstowe struktury danych.

METODY NUMERYCZNE

- Rozwiązywanie równań nieliniowych (metoda Newtona, metoda siecznych, metoda Newtona dla układu równań, modyfikacje, kryteria stopu).
- Podstawowe pojęcia w numerycznym rozwiązywaniu równań (funkcja iteracyjna, kula zbieżności, wykładnik zbieżności, graniczna dokładność).
- Arytmetyka zmiennopozycyjna (reprezentacja zmiennopozycyjna liczb, arytmetyka i błędy zaokrągleń, arytmetyka zmiennopozycyjna zespolona).
- Błędy w obliczeniach (numeryczne uwarunkowanie zadania, błędy reprezentacji wektorów, numeryczna poprawność i stabilność algorytmu).
- Rozwiązywanie układów równań liniowych (uwarunkowanie układu równań liniowych, metoda eliminacji Gaussa, metoda odbić Householdera, metoda Choleskiego, układy i algorytmy blokowe, szacowanie błędów i iteracyjne poprawianie rozwiązania, metody iteracji prostej, metoda sprzężonych gradientów, poprawianie uwarunkowania).
- Liniowe zadania najmniejszych kwadratów (regularne LZNK, dualne LZNK, nieregularne LZNK).
- Algebraiczne zagadnienie własne (metoda potęgowa, odwrotna metoda potęgowa, sprowadzanie macierzy symetrycznej do postaci trójdzielnej, algorytm QR).
- Interpolacja wielomianowa (sformułowanie zadań interpolacji Lagrange'a i Hermite'a, bazy Newtona, różnice dzielone i ich własności, algorytm różnic dzielonych, reszta interpolacyjna).



- Interpolacja funkcjami sklejanymi (motywacja dla stosowania funkcji sklepanych, obcięte funkcje potęgowe, reprezentacja Hermite'a funkcji sklepanych trzeciego stopnia, kubiczne interpolacyjne funkcje sklepane klasy C2, twierdzenie Holladaya, funkcje B-sklepane, kubiczne funkcje interpolacyjne w reprezentacji B-sklepanej, twierdzenie Schoenberga-Whitneya).
- Interpolacja trygonometryczna (trygonometryczne zadanie interpolacji Lagrange'a, dyskretna transformata Fouriera, algorytm FFT).
- Aproksymacja funkcji (wielomiany i węzły Czebyszewa, alternans i algorytm Remeza, aproksymacja jednostajna przez funkcje sklepane, wielomiany ortogonalne).
- Numeryczne obliczanie całek (kwadratury interpolacyjne, zamiana zmiennych, kwadratury Gaussa, kwadratury złożone, ekstrapolacja Richardsona i metoda Romberga).

SEMANTYKA I WERYFIKACJA PROGRAMÓW

- Formalny opis języków programowania.
- Operacyjne i denotacyjne metody definiowania semantyki programów.
- Semantyczne definicje podstawowych konstrukcji programistycznych.
- Matematyczne podstawy semantyki denotacyjnej.
- Pojęcia poprawności programów: poprawność częściowa i całkowita.
- Metody dowodzenia poprawności programów.
- Logika Hoare'a, jej wykorzystanie i własności formalne.
- Podstawowe pojęcia algebry uniwersalnej i ich rola w opisie języków programowania.

JĘZYKI, AUTOMATY I OBLICZENIA

- Elementy teorii języków formalnych: słowa, języki, wyrażenia regularne.
- Automaty skończone i twierdzenie Kleene'go o efektywnej odpowiedniości automatów i wyrażeń.
- Konstrukcje optymalizujące automaty - determinizacja, minimalizacja.
- Języki bezkontekstowe: gramatyki i ich postaci normalne.
- Odpowiedniość gramatyk bezkontekstowych i niedeterministycznych automatów ze stosem.
- Kryteria rozróżniania języków regularnych i bezkontekstowych - lematy o pompowaniu.
- Zagadnienia algorytmiczne: problem niepustości dla automatów i gramatyk, rozpoznawanie języków bezkontekstowych.
- Przykłady zastosowań automatów i gramatyk.
- Uniwersalne modele obliczeń: maszyna Turinga i jej warianty.



- Granice obliczalności: nierozstrzygalność problemu stopu, przykłady praktycznych problemów nierozstrzygalnych.
- Klasyfikacja gramatyk, modeli obliczeń i języków według hierarchii Chomsky'ego.
- Wprowadzenie do zagadnień złożoności obliczeniowej: klasy P i NP.
- Twierdzenie Cooka-Levina o NP-zupełności SAT.
- Hipoteza $P \neq NP$ i jej praktyczne implikacje, informacja o pozytywnych zastosowaniach problemów trudnych obliczeniowo, np. w kryptografii.

PROGRAMOWANIE OBIEKTOWE

- Pojęcie klas, UML.
- Składnia Javy (identyfikatory, literały, proste instrukcje, typy ref. i wart., tablice, GC, new, null, ref/wart, funkcje (met.), parametry, dokumentacja).
- Kapsułkowanie, konstruktory i inicjalizacja.
- Dziedziczenie, klasy abstrakcyjne, interfejsy, polimorfizm.
- Wyjątki nadzorowane i nienadzorowane.
- Typy uogólnione.
- Kolekcje.
- Wzorce projektowe z przykładami (singleton, fabryka, adapter, dekorator, obserwator i inne).
- Wejście/wyjście.
- Wyrażenia regularne.

BAZY DANYCH

- Relacyjny model danych.
- Podstawowe konstrukcje języka SQL i sposoby ich realizacji.
- Rodzaje metadanych i ich rola.
- Redundancja a postacie normalne.
- Przejście od modelu pojęciowego do modelu logicznego.
- Fizyczna reprezentacja danych.

PROGRAMOWANIE WSPÓLBIEŻNE

- Podstawowe pojęcia współbieżności: proces, przeplot, wykonanie współbieżne.
- Poprawność programów współbieżnych.



- Modele współbieżności.
- Klasyczne problemy współbieżności: wzajemne wykluczanie, czytelnicy i pisarze, pięciu filozofów, producenci i konsumenci.
- Wybrane algorytmy wzajemnego wykluczania niekorzystające ze wsparcia sprzętu ani systemu operacyjnego.
- Definicja i różne semantyki semaforów: semafor Dijkstry, semafony słabe, silne, silnie uczciwe.
- Definicja i różne semantyki monitorów: monitor Hoare, realizacja za pomocą biblioteki pthread.
- Metody weryfikacji poprawności programów współbieżnych: LTL, model checking, metody dedukcyjne.
- Metody synchronizacji w modelu rozproszonym: komunikacja synchroniczna i asynchroniczna (przestrzeń krotek).
- Wydajność w modelu współbieżnym: praca, rozpiętość, zrównoleglenie, przyspieszenie.
- Wybrane algorytmy rozproszone (wzajemne wykluczanie w systemach rozproszonych, synchronizacja zegarów logicznych, uzgadnianie).

SYSTEMY OPERACYJNE

- Mechanizmy sprzętowe potrzebne do realizacji wielodostępnych, wieloprotocowych systemów operacyjnych.
- Podstawy programowania niskopoziomowego, assembler.
- Algorytmy szeregowania procesów.
- Pamięć wirtualna. Cechy charakterystyczne różnych technik realizacji pamięci wirtualnej.
- Funkcje systemowe do obsługi plików z poziomu użytkownika (czynności wykonywane przez system operacyjny, struktury danych).

SIECI KOMPUTEROWE

- Warstwy sieci.
- Protokoły TCP, UDP, IP, ICMP, Ethernet.
- Adresy internetowe, tablice tras, zasady trasowania, NAT.
- System nazw domenowych.
- Sieciowy interfejs gniazd.



INŻYNIERIA OPROGRAMOWANIA

- Procesy wytwarzania oprogramowania.
- Zwinne wytwarzanie oprogramowania.
- Inżynieria wymagań.
- Metody i języki modelowania w inżynierii oprogramowania.
- Architektura oprogramowania.
- Zapewnianie jakości oprogramowania.
- Evolucja i pielęgnacja oprogramowania.

JĘZYKI I PARADYGMATY PROGRAMOWANIA

- Modele obliczeń i paradygmaty programowania.
- Programowanie funkcyjne.
- Programowanie imperatywne.
- Typy, kontrola typów.
- Semantyka języków programowania, interpretery i kompilatory.
- Programowanie w logice.
- Programowanie obiektowe.
- Programowanie współbieżne i Erlang.

IPP i BLOK JNP

- Znajomość konstrukcji programistycznych języków C i C++.
- Znajomość metod zarządzania konfiguracjami i wersjami oprogramowania.
- Znajomość technik i narzędzi tworzenia oprogramowania (linkowanie, debugowanie, profilowanie itd.).

APLIKACJE WWW

- Rodzina protokołów HTTP.
- Mechanizmy tworzenia stron internetowych: HTML, CSS.
- Język JavaScript oraz jego unikalne cechy.



-
- Języki kompilowane na JavaScript.
 - Mechanizmy budowania aplikacji internetowych: ciasteczka, żądania, routing, widoki, mapowanie obiektowo-relacyjne.
 - Bezpieczeństwo aplikacji webowych.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA

- Prawdopodobieństwo warunkowe: prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, niezależność zdarzeń.
- Dyskretne zmienne losowe i ich rozkłady: rozkład dwumianowy, geometryczny, Poissona.
- Parametry rozkładu: wartość oczekiwana, wariancja, funkcje tworzące prawdopodobieństwa.
- Nierówności probabilistyczne: Markowa, Czebyszewa, Chernoffa.
- Ciągłe zmienne losowe: definicja, własności, rozkład wykładniczy oraz normalny, centralne twierdzenie graniczne.
- Łańcuchy Markowa: prawdopodobieństwa oraz średnie czasy dotarcia, twierdzenie ergodyczne.
- Wnioskowanie statystyczne: estymatory nieobciążone, estymatory największej wiarygodności.

BEZPIECZEŃSTWO SYSTEMÓW KOMPUTEROWYCH

- Podstawy kryptografii.
- Infrastruktura klucza publicznego.
- Modele i klasy bezpieczeństwa systemów informatycznych.
- Modele uwierzytelniania, strategie kontroli dostępu.
- Bezpieczeństwo protokołów komunikacyjnych i aplikacji.
- Praktyczna ochrona systemów operacyjnych i usług aplikacyjnych z wykorzystaniem izolacji, ścian ogniowych, VPN, TLS, PGP.
- Problematyka bezpiecznego programowania.
- Zagrożenia związane z przestępczością elektroniczną.