PESEL: | | | | | | | | | | | |

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Egzamin wstępny na studia II stopnia na kierunku INFORMATYKA

Czas rozwiązywania: 150 minut

W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami **TAK** *albo* **NIE***. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.*

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

$\boxed{\texttt{TAK}}$ (a) dzieli się przez 9;
$\boxed{\texttt{NIE}}$ (b) jest pierwsza;
$\boxed{\texttt{TAK}}$ (c) jest nieparzysta.

Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa **TAK** *oraz* **NIE***. Pisać należy długopisem lub piórem.*

Zasady punktacji

Zdający zdobywa punkty "duże"(od 0 do 30) i punkty "małe"(od 0 do 90):

- *jeden punkt "duży" kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- *jeden punkt "mały" kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 "małe" punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden "duży" punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = D + m/100$$

gdzie D oznacza liczbę "dużych", a m liczbę "małych" punktów. Na przykład: 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty "duże". Punkty "małe" zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo "dużych" punktów.

Powodzenia!

1. $\{S_n\}_{n\geq 1}$ jest ciągiem sum częściowych szeregu rozbieżnego. Wynika z tego, że ciąg $\{S_{n+1} - S_n\}_{n\geq 1}$ jest

- [ ] (a) rozbieżny;
- [ ] (b) nieograniczony;
- [ ] (c) niezbieżny do 0.

2. Funkcja $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Wynika z tego, że istnieje $x \in [0; 1]$, dla którego $f'(x)$ jest

- [ ] (a) mniejsze od 0;
- [ ] (b) równe -1;
- [ ] (c) większe bądź równe 1.

3. Ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\geq 1}$ składa się z funkcji $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanych wzorami $f_n(x) = x - \frac{1}{n}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ten ciąg funkcyjny jest

- [ ] (a) zbieżny punktowo i jednostajnie;
- [ ] (b) niemal jednostajnie zbieżny;
- [ ] (c) zbieżny punktowo do funkcji ciągłej.

4. X jest przestrzenią euklidesową i wektory $u, v, w \in X$ tworzą układ ortonormalny. Wynika z tego, że

- [ ] (a) wektory u, v, w są liniowo niezależne;
- [ ] (b) wektory $u + v + w$ i $u - 2v + w$ są ortogonalne;
- [ ] (c) wektory $u + v + w$ i $u - 2v + w$ są ortonormalne.

5. W przestrzeni $\mathcal{P}$ wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej 1 funkcjonały φ_1 i φ_2 dane są wzorami: dla $p \in \mathcal{P}$

$$\varphi_1(p) = p(0), \qquad \varphi_2(p) = p(1).$$

Wynika z tego, że

- [ ] (a) funkcjonały φ_1 i φ_2 są liniowo niezależne;
- [ ] (b) funkcjonał φ dany wzorem $\varphi(p) = p'(\frac{1}{2})$ jest pewną kombinacją liniową φ_1 i φ_2;
- [ ] (c) wielomiany $p_1(t) = 1-t$ i $p_2(t) = t$ oraz funkcjonały φ_1 i φ_2 stanowią wzajemnie do siebie sprzężone bazy odpowiednio w $\mathcal{P}$ oraz przestrzeni sprzężonej $(\mathcal{P})^*$.

6. Dla danego $a \in \mathbb{R}$ szukamy rzeczywistych pierwiastków równania nieliniowego $x^3 - x = a$ metodą Newtona.

- [ ] (a) Wzór na kolejną iterację metody to $x_{k+1} = \frac{2x_k^3 - a}{3x_k^2 + 1}$.
- [ ] (b) Dla $a = 1$ i dowolnego $x_0 \geq 1$, metoda Newtona jest zbieżna do jakiegoś pierwiastka równania.
- [ ] (c) Dla $a = 0$ i $x_0 = 10^{-2}$ metoda Newtona jest zbieżna kwadratowo do zera.

7. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą (zwykłą) ciągu $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$. Wynika z tego, że funkcją tworzącą ciągu

- [ ] (a) $\langle -a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ jest $A(-x)$;
- [ ] (b) $\langle 2^n a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ jest $A(2x)$;
- [ ] (c) $\langle \sum_{k=0}^{n} a_k \rangle_{n=0}^{\infty}$ jest $\frac{A(x)}{1-x}$.

8. G jest grafem spójnym o $n > 2$ wierzchołkach i takim, że każda jego krawędź należy do pewnego cyklu prostego. Wynika z tego, że

- [ ] (a) G ma cykl Hamiltona;
- [ ] (b) graf otrzymany przez usunięcie z G jednego wierzchołka jest spójny;
- [ ] (c) każde dwa różne wierzchołki w G są połączone przynajmniej dwiema krawędziowo rozłącznymi ścieżkami.

9. Jeśli $f : A \to B$ jest różnowartościowa, to funkcja obrazu $f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$

- [ ] (a) jest różnowartościowa;
- [ ] (b) jest funkcją odwrotną do funkcji przeciwobrazu $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$;
- [ ] (c) spełnia warunek $\bigcup\{f^{\to}(Z) : Z \in \mathcal{L}\} = f^{\to}(\bigcup \mathcal{L})$ dla dowolnej rodziny $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

10. Rozpatrzmy zbiór funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, uporządkowany „po współrzędnych”, tj. $f \preceq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $f(n) \leq g(n)$. W tym porządku

- [ ] (a) każdy niepusty podzbiór ma kres dolny;
- [ ] (b) istnieje antyłańcuch mocy continuum;
- [ ] (c) istnieje łańcuch mocy continuum.

11. Wrzucamy losowo dwie kule do dwóch urn. Wartość oczekiwana liczby niepustych urn jest równa

- [ ] (a) 1;
- [ ] (b) $\frac{3}{2}$;
- [ ] (c) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

12. Dla dowolnego języka $L \subseteq A^*$ nad alfabetem A oznaczmy przez L^R zbiór „lustrzanych odbić” słów z L. Formalnie: $\varepsilon^R = \varepsilon$, $(wa)^R = a(w^R)$ dla $a \in A$ i $w \in A^*$, $L^R = \{w^R : w \in L\}$. Niech L' oznacza konkatenację LL^R języków L i L^R. Wynika z tego, że

- [ ] (a) jeśli L jest regularny to L' też;
- [ ] (b) jeśli L jest bezkontekstowy to L' też;
- [ ] (c) jeśli L jest rozstrzygalny to L' też.

13. Następujący język jest bezkontekstowy:

- [ ] (a) $\{a^n b^m c^k d^l : n = k \text{ i } m = l\}$;
- [ ] (b) $\{a^n b^m c^k d^l : n = l \text{ i } m = k\}$;
- [ ] (c) $\{a^n b^m c^k d^l : n = m \text{ i } k = l\}$.

14. Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 1. Wynika z tego, że

- [ ] (a) wysokość (czyli największa liczba *krawędzi* od korzenia do liścia) drzewa BFS w grafie dwudzielnym $K_{n,n}$ wynosi 2;
- [ ] (b) wysokość drzewa DFS w grafie dwudzielnym $K_{n,n}$ wynosi n;
- [ ] (c) jeśli $n > 10$, to istnieje spójny graf n-wierzchołkowy o n krawędziach, dla którego drzewa BFS i DFS o tym samym korzeniu są takie same.

15. G jest 1001-wierzchołkowym grafem dwuspójnym wierzchołkowo. Wynika z tego, że

- [ ] (a) jeśli wysokość pewnego drzewa DFS grafu G wynosi 1000, to G ma cykl Hamiltona;
- [ ] (b) wysokość każdego drzewa BFS grafu G jest niewiększa niż 500;
- [ ] (c) wysokość każdego drzewa DFS grafu G jest różna od 2.

16. Koszt wykonania algorytmu Dijkstry dla spójnego grafu n-wierzchołkowego o m krawędziach wynosi

- [ ] (a) $O(m \log_2 n)$ w implementacji z kopcem zupełnym;
- [ ] (b) $O(n \log_2 n + m)$ w implementacji z kopcem Fibonacciego;
- [ ] (c) $O(n^2)$ w implementacji z kolejką dwumianową.

17. W strukturze relacyjnej, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie, formuła logiki Hoare'a

$$\{\texttt{x < a}\}\ \texttt{while x} \neq \texttt{0 do x := x + 1}\ \{\texttt{x = 0}\}$$

- [ ] (a) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\texttt{a} = 1$;
- [ ] (b) jest prawdziwa dla $\texttt{a} = 1$;
- [ ] (c) jest prawdziwa dla każdego $\texttt{a}$.

18. Warunkiem wystarczającym powstania zakleszczenia jest

- [ ] (a) niepodzielność co najmniej jednego zasobu;
- [ ] (b) brak wywłaszczeń;
- [ ] (c) przetrzymywanie i oczekiwanie.

19. Zmienna `x` jest zmienną globalną o wartości początkowej 0. W systemie wykonują się dwa procesy o następującej treści:

```
process P;
var i: integer;
begin
  for i := 1 to 5 do x := x + 1;
end;
```

Po zakończeniu wykonania obu procesów wartość zmiennej `x` jest

- [ ] (a) równa 10;
- [ ] (b) niemniejsza niż 5;
- [ ] (c) mniejsza niż 10.

20. W pewnym systemie komputerowym, w którym zastosowano stronicowanie, odwołania do pamięci generowane przez procesy są 16 bitowe. Rozmiar strony wynosi 1 KiB (1024 bajty), a jeden wpis w tablicy stron zajmuje 2 bajty. Wynika z tego, że

- [ ] (a) tablica stron mieści się na jednej stronie;
- [ ] (b) proces może zaadresować przestrzeń wielkości 512 KiB;
- [ ] (c) tablica stron musi być co najmniej dwupoziomowa.

21. Protokół ARP służy do

- [ ] (a) wiązania adresu fizycznego komputera z adresem IP;
- [ ] (b) wiązania nazwy komputera z adresem IP;
- [ ] (c) wiązania nazwy komputera z adresem fizycznym.

22. W sieciach TCP/IP zbudowanych w oparciu o technologię Ethernet parametr MTU oznacza

- [ ] (a) maksymalny rozmiar pola danych ramki Ethernetowej;
- [ ] (b) maksymalny rozmiar segmentu danych TCP;
- [ ] (c) maksymalny rozmiar datagramu IP, który nie wymaga jeszcze stosowania fragmentacji.

23. Każdy procesor 32-bitowy ma

- [ ] (a) 32-bitową zewnętrzną szynę danych;
- [ ] (b) 32-bitową zewnętrzną szynę adresową;
- [ ] (c) 32-bitowe rejestry danych.

24. W ośmiobitowym rejestrze procesora zapisana jest wartość $(11000000)_2$, która interpretowana

- [ ] (a) w naturalnym kodzie binarnym reprezentuje liczbę 192;
- [ ] (b) w kodzie uzupełnieniowym do dwójki reprezentuje liczbę -64;
- [ ] (c) w kodzie moduł-znak reprezentuje liczbę -64.

25. Tabele `Emp` i `Dept` mają, odpowiednio, E i D wierszy. Zapytanie

```
SELECT * FROM Emp e, Dept d WHERE e.deptno = d.deptno
```

- [ ] (a) zawsze ma niepusty wynik, jeśli $D \cdot E \neq 0$;
- [ ] (b) ma pesymistyczną złożoność czasową $O(D \cdot E)$;
- [ ] (c) może mieć wynik rozmiaru $D \cdot E$.

26. Każda tabela w pierwszej postaci normalnej (1NF) mająca dokładnie dwie kolumny jest

- [ ] (a) w drugiej postaci normalnej (2NF);
- [ ] (b) w trzeciej postaci normalnej (3NF);
- [ ] (c) w postaci normalnej Boyce'a-Codda (BCNF).

27. Przypuśćmy, że zapytanie `SELECT R.A FROM R` zwraca r wierszy, zapytanie `SELECT S.A FROM S` zwraca s wierszy, a zapytanie `SELECT R.A FROM R WHERE R.A NOT IN (SELECT S.A FROM S)` zwraca k wierszy. Wynika z tego, że

- [ ] (a) $k = r - s$;
- [ ] (b) $r - s \leq k \leq r$;
- [ ] (c) $0 \leq k \leq r$.

28. Dla fragmentu HTML

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<head><title>t</title>
<style>
  .foo {color: red;}
  #foo {color: blue;}
  #main p {color: green;}
</style>
</head>
<body>
  <div id="main">
    <p id="foo" class="bar">C<span class="foo">A</span>B</p>
  </div>
</body>
</html>
```

- [ ] (a) litera A jest czerwona;
- [ ] (b) litera B jest niebieska;
- [ ] (c) litera C jest zielona.

29. Dany jest program w C++:

```
#include <iostream>

class A {
public:
    virtual void g() {
        std::cout << "A";
    }
};

class C : public A {
public:
    void g() {
        std::cout << "C";
    }
};

int main() {
    A* p = new C();
    p->g();
}
```

W podanym programie

- [ ] (a) inicjalizacja zmiennej `p` zostanie odrzucona przez kompilator;
- [ ] (b) wywołanie metody `p->g()` spowoduje wypisanie C;
- [ ] (c) wywołanie metody `p->g()` spowoduje wypisanie AC.

30. Rozważamy programy napisane w Javie. Jeżeli klasa A jest nadklasą B, to w treści klasy B można zdefiniować

- [ ] (a) można zdefiniować metody o takich samych nagłówkach jak metody zdefiniowane w klasie A.
- [ ] (b) metodę o takim samym nagłówku, jak metoda zdefiniowana w klasie A, ale z węższą widocznością niż była podana w metodzie z klasy A;
- [ ] (c) metodę o takim samym nagłówku, jak metoda zdefiniowana w klasie A, ale z szerszą widocznością niż była podana w metodzie z klasy A;