

PESEL:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

UNIwersytet Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Egzamin wstępny na studia 2 stopnia na kierunku INFORMATYKA

27 czerwca 2024 roku

Czas rozwiązywania: 150 minut

*W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami **TAK** albo **NIE**. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.*

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

TAK

 (a) dzieli się przez 9;

NIE

 (b) jest pierwsza;

TAK

 (c) jest nieparzysta.

*Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa **TAK** oraz **NIE**. Pisać należy długopisem lub piórem.*

Zasady punktacji

Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):

- *jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- *jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = \min(30, D + m/100),$$

gdzie D oznacza liczbę „dużych”, a m liczbę „małych” punktów. Na przykład 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.

Powodzenia!

1. Ciąg zdefiniowany wzorem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- ☐ (a) ma granicę równą 1;
☐ (b) jest ograniczony;
☐ (c) jest rosnący.

2. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \int_0^x e^{(-t^2)} dt$. Wynika z tego, że

- ☐ (a) f jest różniczkowalna oraz f' jest ciągła;
☐ (b) f jest rosnąca;
☐ (c) $f'(1) = \frac{1}{e}$.

3. Niech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, która ma zerową różniczkę w punkcie $a \in \mathbb{R}^2$. Wynika z tego, że

- ☐ (a) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$;
☐ (b) $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ jest funkcją ciągłą z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$;
☐ (c) w punkcie a funkcja f ma ekstremum lokalne.

4. Rząd macierzy A wymiaru 5×9 o elementach rzeczywistych wynosi 4. Wynika z tego, że

- ☐ (a) $\dim(\ker A) = 5$;
☐ (b) $\dim(\ker A^T) = 5$;
☐ (c) $\dim(\operatorname{im} A^T) = 4$.

5. Niech $M = \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathbb{R}^{4,4} \mid a_{11} + 2a_{22} + 3a_{33} + 4a_{44} = 0\}$. Wynika z tego, że

- ☐ (a) istnieją macierze $A, B \in M$, takie że $AB \notin M$;
☐ (b) zbiór M jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^{4,4}$ o wymiarze co najmniej 10;
☐ (c) istnieje niezerowa podprzestrzeń liniowa N przestrzeni $\mathbb{R}^{4,4}$, taka że $M \oplus N = \mathbb{R}^{4,4}$.

6. Dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 2$ niech P_n oznacza zbiór wszystkich dzielników pierwszych liczby n . Wynika z tego, że

- ☐ (a) rodzina $\{P_n \mid n \geq 2\}$ jest antyłańcuchem w sensie zawierania zbiorów;
☐ (b) zbiór $\bigcup_{n \geq 2} P_n$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych;
☐ (c) rodzina $\{P_{2^m} \mid m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 1\}$ jest skończona.

7. Dla dowolnego niepustego zbioru A moc zbioru wszystkich funkcji

- ☐ (a) z A do A jest większa od mocy zbioru A ;
☐ (b) z A do $\{0, 1\}$ jest większa od mocy zbioru A ;
☐ (c) z $\{0, 1\}$ do A jest większa od mocy zbioru A .

8. Liczba $13^{16} - 11^{16}$ jest podzielna przez

☐ (a) 17;

☐ (b) 9;

☐ (c) 8.

9. Niech $P_G(x)$ będzie wielomianem chromatycznym n -wierzchołkowego grafu G . Wynika z tego, że

☐ (a) jeśli G jest niespójny, to $P_G(x) = x^2W(x)$, gdzie $W(x)$ jest pewnym wielomianem;

☐ (b) jeśli $P_G(x) = x(x-1)^{n-1}$, to G jest ścieżką n -wierzchołkową;

☐ (c) jeśli G jest planarny, to $P_G(4) \neq 0$.

10. Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, a A i B zdarzeniami losowymi w tym zbiorze. Niech $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B|A) = \frac{3}{7}$, $P(B|\Omega - A) = \frac{4}{7}$. Wynika z tego, że

☐ (a) $P(B) < \frac{1}{2}$;

☐ (b) $P(A \cap B) = \frac{9}{70}$;

☐ (c) $P(A|B) < \frac{1}{4}$.

11. Niech X będzie zmienną losową, taką że $P(X=1) = \frac{1}{10}$, $P(X=2) = \frac{2}{10}$, $P(X=3) = \frac{3}{10}$, $P(X=4) = \frac{4}{10}$. Niech g_X będzie funkcją tworzącą prawdopodobieństwa zmiennej losowej X . Wynika z tego, że

☐ (a) $P(X \geq 3 | X \leq 3) = \frac{1}{2}$;

☐ (b) $E(X) = 3$;

☐ (c) $g_X(2) \geq 10$.

12. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2024 & 1 \\ 2023 & 1 \\ 2022 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Wektor $x \in \mathbb{R}^2$ minimalizujący $\|b - Ax\|_2$

☐ (a) spełnia równość $\|b - Ax\|_2^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$;

☐ (b) jest wyznaczony jednoznacznie;

☐ (c) spełnia równość $A^T(b - Ax) = 0$.

13. W języku Java poniższe wyrażenie jest poprawne składniowo i wylicza się do wartości **true**:

☐ (a) `new String("A").equals(new String("A"))`

☐ (b) `new String("A") != new String("A")`

☐ (c) `new String("A") <= new String("A")`

14. Dany jest program w języku Java:

```
1 public class A {
2     private int i;
3     private String s;
4
5     public A(int i, String s) {
6         this.i = i;
7         this.s = s;
8     }
9
10    public A(int i) {
11        this.i = i;
12    }
13
14    public A(String s) {
15        this.s = s;
16    }
17
18    @Override
19    public String toString() {
20        return "s = '" + s + "', i = " + i;
21    }
22
23    public static void main(String[] args) {
24        // System.out.println(new A(0, ""));
25        // System.out.println(new A(0));
26        // System.out.println(new A(""));
27    }
28 }
```

Program skompiluje się i po uruchomieniu wypisze `s = '', i = 0`, jeśli odkomentujemy kod w linii

- ☐ (a) 24;
- ☐ (b) 25;
- ☐ (c) 26.

15. Dla grafu $G = (V, E)$, gdzie $|V| = n$ i $|E| = O(n)$, w którym krawędzie mają przyporządkowane nieujemne wagi rzeczywiste, istnieje sekwencyjna implementacja algorytmu

- ☐ (a) Dijkstry o złożoności czasowej $O(n \log n)$;
- ☐ (b) Kruskala o złożoności czasowej $O(n \log n)$;
- ☐ (c) Floyda–Warshalla o złożoności czasowej $O(n \log n)$.

16. Drzewo AVL powstałe przez wstawienie do początkowo pustego drzewa kolejnych liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 3 \cdot 2^k\}$ dla $k > 0$ ma

- ☐ (a) $O(3 \cdot 2^{k-1})$ liści;
- ☐ (b) korzeń o kluczu 2^{k+1} ;
- ☐ (c) wysokość $k + 1$ (mierzoną liczbą krawędzi).

17. Każdy język nad alfabetem jednoliterowym

- ☐ (a) jest regularny;
- ☐ (b) jest bezkontekstowy;
- ☐ (c) jeśli jest bezkontekstowy, to jest też regularny.

18. Załóżmy, że język L nad alfabetem $\{0, 1, \#\}$ należy do klasy P .

$$L_0 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^* w\#v \in L\},$$
$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^* w\#v \in L \wedge |v| \leq |w|\}.$$

Wynika z tego, że

- ☐ (a) język L_0 należy do klasy NP ;
- ☐ (b) język L_1 należy do klasy NP ;
- ☐ (c) oba języki L_0 oraz L_1 są rozstrzygalne.

19. W strukturze relacyjnej, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie, następująca formuła logiki Hoare'a

$\{x = a\} \text{ while } x < 0 \text{ do } x := x * a \{x > 0\}$

jest prawdziwa dla każdego

- ☐ (a) a ;
- ☐ (b) $a > 0$;
- ☐ (c) $a < 0$.

20. Dane są dwie relacje: $R(A, B, C)$ i $S(C, D)$. Wynika z tego, że w semantyce zbiorów

- ☐ (a) $\pi_{A,B,C}(R \bowtie S) = R$;
- ☐ (b) $\pi_{A,B,C}(R \bowtie S) \subseteq R$;
- ☐ (c) $\pi_{A,B,C}(R \bowtie S) \supseteq R$.

21. Dana jest tabela $R(a)$ zawierająca tylko jeden wiersz:

(1)

oraz dwie transakcje:

T_1

INSERT INTO R VALUES (2);
INSERT INTO R VALUES (3);
DELETE FROM R WHERE a = 1;

T_2

SELECT SUM(a) FROM R;

Jeśli uruchomimy T_1 i T_2 z poziomem izolacji $SERIALIZABLE$, to możliwym wynikiem T_2 jest

- ☐ (a) 1;
- ☐ (b) 3;
- ☐ (c) 5.

22. W HTML do elementów opisujących tabelę należą tagi

☐ (a) `<table>`, `<thead>`, `<tr>`;

☐ (b) `<table>`, `<tr>`, `<td>`;

☐ (c) `<thead>`, `<tbody>`.

23. Sieć Feistela

☐ (a) jest ogólnym schematem konstrukcji wielu popularnych szyfrów blokowych;

☐ (b) jest elementem konstrukcji szyfru RSA;

☐ (c) opisuje topologię sieci VPN.

24. W cyberbezpieczeństwie zaufana trzecia strona jest to

☐ (a) strona pamięci fizycznej w komputerze, na której zapisywane są hasła;

☐ (b) każda ze stron w komunikacji między trzema podmiotami;

☐ (c) w komunikacji między dwoma podmiotami pewien trzeci dodatkowy podmiot, któremu powierza się pewne czynności umożliwiające bezpieczną komunikację.

25. Interfejs sieciowy może mieć jednocześnie adresy sieciowe

☐ (a) 10.1.0.10/16 oraz 2001:6a0:5001:1::10/64

☐ (b) 2001:6a0:5001:1::10/64 oraz fe80::5054:ff:fe89:db42/64

☐ (c) 10.1.0.10 oraz 127.0.0.1

26. Istnieje scenariusz, w którym klient wysłał do serwera pakiet UDP o rozmiarze 5000 B, a w wyniku tego serwer

☐ (a) odebrał pakiet UDP o rozmiarze 5000 B;

☐ (b) odebrał 3 pakiety UDP o łącznym rozmiarze 5000 B;

☐ (c) nie odebrał żadnego pakietu UDP.

27. Funkcja `f` udostępniana przez poniższy monitor z klasyczną semantyką Hoare'a została wywołana dokładnie dwa razy – najpierw przez proces P , a następnie przez proces Q .

```
monitor M {  
    condition c;  
  
    void f() {  
        signal(c);  
        wait(c);  
    }  
}
```

☐ (a) Przez pewien czas proces P był wstrzymany wewnątrz funkcji `f`.

☐ (b) Proces P zakończył wykonanie funkcji `f`.

☐ (c) Proces Q zakończył wykonanie funkcji `f`.

28. Rozważmy następujące rozwiązanie problemu wzajemnego wykluczania $N \geq 2$ procesów przy użyciu globalnego semafora S o wartości początkowej równej 1:

```
process P() {  
    while (true) {  
        sekcja_lokalna;  
        P(S);  
        sekcja_krytyczna;  
        V(S);  
    }  
}
```

- ☐ (a) Jeśli semafor jest semaforem silnie uczciwym, to rozwiązanie jest żywotne.
- ☐ (b) Jeśli semafor jest semaforem słabym i $N = 2$, to rozwiązanie jest żywotne.
- ☐ (c) Rozwiązanie ma własność bezpieczeństwa zarówno dla semafora silnie uczciwego, jak i słabego.
29. W systemie operacyjnym ze stronicowaniem dwa różne procesy P_1 i P_2 współdzielą fragment pamięci: adres wirtualny v procesu P_1 i adres wirtualny $v + 8192$ procesu P_2 są odwzorowane na ten sam adres fizyczny. Wynika z tego, że rozmiar strony jest
- ☐ (a) mniejszy lub równy 16 KiB;
- ☐ (b) równy 8 KiB;
- ☐ (c) większy lub równy 4 KiB.
30. Zadaniem systemu operacyjnego z pamięcią wirtualną realizowaną za pomocą stronicowania jest
- ☐ (a) zgłaszanie przerwania, gdy proces odwołuje się do strony, której nie ma w pamięci;
- ☐ (b) przeliczanie adresu wirtualnego na adres fizyczny, gdy procesor wykonuje rozkaz odwołujący się do pamięci;
- ☐ (c) inicjowanie transferu zawartości stron między pamięcią operacyjną a pamięcią pomocniczą.