ALGEBRA LINIOWA, WNE UW, EGZAMIN, 31.01.2011. TEMAT A

KAŻDE ZADANIE powinno być rozwiązane **NA ODDZIELNEJ KARTCE**.

1. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ dane są bazy $\mathcal{A} = \{(1,1,3),(1,2,1),(2,3,3)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$. Niech $\alpha \in \mathbf{R}^3$ będzie wektorem, który w bazie $\mathcal{A}$ ma współrzędne $2,-1,1$.
a) Znaleźć współrzędne wektora α w bazie $\mathcal{B}$.
b) Znaleźć taki wektor $\gamma = (s_1,s_2,s_3)$, że wektor $(1,0,0)$ ma w bazie $\{(1,1,3),(1,2,1),(s_1,s_2,s_3)\}$ współrzędne $4,3,1$.

2. Niech $V = \text{lin}((1,1,2,3),(2,3,1,6),(1,0,5,3)),(4,5,5,12))$ oraz $W_r = \text{lin}((1,1,2,3),(2,3,1,6),(2,1,\text{r},6)$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.
b) Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ przestrzeń W_r może być opisana jednym równaniem liniowym?

3. Niech $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$, $\mathcal{B} = \{(3,1),(1,0)\}$ i niech przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie dane wzorem $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (4x_1+x_2-x_3, 2x_1-x_2+x_3)$ a przekształcenie liniowe $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
a) Znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz znaleźć wzór na ψ.
b) Znaleźć $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$. Dla wektora $(\psi \circ \varphi)((1,1,1))$ znaleźć jego współrzędne w bazie $\mathcal{A}$.

4. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Obliczyć $\det\text{A}$, $\det(\text{A}^5 \cdot \text{B}^7)$, $\det(\text{A}+\text{B})$.
b) Obliczyć B^{-1}.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Czy macierz A jest diagonalizowalna? Jeśli tak, to znaleźć taką macierz odwracalną C, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ macierz B_t jest diagonalizowalna?

6. W przestrzeni R^4 rozpatrzmy hiperpłaszczyznę $H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2\}$ oraz prostą $L = \text{lin}((1,1,0,1))$.
a) Znaleźć parametryzację hiperpłaszczyzny H oraz parametryzację prostej L
b) Znaleźć rzut prostopadły wektora $\alpha = (1,2,1,1)$ na prostą L.

7. a) Znaleźć postać standardową zadania programowania liniowego:
$3x_1 - 4x_2 \to \max$ przy warunkach
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 - 4x_2 \leq 1 \end{cases} \text{oraz } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$
b) Rozwiązać metodą sympleks następujące zadanie programowania liniowego:
$x_2 - x_3 + x_4 \to \min$ przy warunkach
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \text{oraz } x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,4.$$

8. Dane są formy kwadratowe $q(x_1,x_2,x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ oraz $p_s(x_1,x_2,x_3) = sx_1^2 + x_2^2 + sx_3^2 + 2x_1x_3$.
a) Sprawdzić, czy forma q jest ujemnie określona.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ forma p_s jest dodatnio określona? Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ forma p_s jest ujemnie półokreślona?

ALGEBRA LINIOWA, WNE UW, EGZAMIN, 31.01.2011. TEMAT B

KAŻDE ZADANIE powinno być rozwiązane **NA ODDZIELNEJ KARTCE**.

1. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ dane są bazy $\mathcal{A} = \{(2,3,3),(1,1,3),(1,2,1),\}$, $\mathcal{B} = \{(0,1,1),(0,0,1),(1,1,1)\}$.
Niech $\alpha \in \mathbf{R}^3$ będzie wektorem, który w bazie $\mathcal{A}$ ma współrzędne $1, 2, -1$.
a) Znaleźć współrzędne wektora α w bazie $\mathcal{B}$.
b) Znaleźć taki wektor $\gamma = (s_1, s_2, s_3)$, że wektor $(1,0,0)$ ma w bazie $\{(2,3,3),(1,1,3),(s_1,s_2,s_3)\}$ współrzędne $3, 2, 1$.

2. Niech $V = \mathrm{lin}((1,2,1,3),(2,5,3,7),(1,1,0,2)),(3,8,5,11))$ oraz $W_r = \mathrm{lin}((1,2,1,3),(2,5,3,7),(2,3,\mathrm{r},5)$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.
b) Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ przestrzeń W_r może być opisana jednym równaniem liniowym?

3. Niech $\mathcal{A} = \{(1,2,1),(2,1,1),(1,1,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,3)\}$ i niech przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie dane wzorem $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3)$ a przekształcenie liniowe $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz znaleźć wzór na ψ.
b) Znaleźć $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$. Dla wektora $(\psi \circ \varphi)((1,1,1))$ znaleźć jego współrzędne w bazie $\mathcal{A}$.

4. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Obliczyć $\det\mathrm{A}$, $\det(\mathrm{A}^4 \cdot \mathrm{B}^8)$, $\det(\mathrm{A} + \mathrm{B})$.
b) Obliczyć B^{-1}.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B_t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ t & 3 \end{bmatrix}$.
a) Czy macierz A jest diagonalizowalna? Jeśli tak, to znaleźć taką macierz odwracalną C, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ macierz B_t jest diagonalizowalna?

6. W przestrzeni R^4 rozpatrzmy hiperpłaszczyznę $H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3\}$ oraz prostą $L = \mathrm{lin}((1,1,1,0))$.
a) Znaleźć parametryzację hiperpłaszczyzny H oraz parametryzację prostej L.
b) Znaleźć rzut prostopadły wektora $\alpha = (2,1,2,1)$ na prostą L.

7. a) Znaleźć postać standardową zadania programowania liniowego:
$4x_1 - x_2 \to \max$ przy warunkach
$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$ oraz $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

b) Rozwiązać metodą sympleks następujące zadanie programowania liniowego:
$x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$ przy warunkach
$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ oraz $x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4.$

8. Dane są formy kwadratowe $q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ oraz $p_s(x_1,x_2,x_3) = sx_1^2 + x_2^2 + sx_3^2 + 4x_1x_3$.
a) Sprawdzić, czy forma q jest ujemnie określona.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ forma p_s jest dodatnio określona? Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ forma p_s jest ujemnie półokreślona?