

MIMUW Rok akademicki 2010/2011

GAL. Zadania domowe w grupie 12.

Seria 19/20.

1. Dana jest hiperpowierzchnia  $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 4x_2 + 6x_3 + 8 = 0\}$ 
  - a) Znaleźć równanie opisujące  $X$  w układzie bazowym  $(1, 2, 3); (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0)$ .
  - b) W jakim układzie bazowym hiperpowierzchnia  $X$  jest opisana równaniem  $y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 - 4y_2y_3 + 2y_3 - 4 = 0$ ?
2. Rozpatrzmy hiperpowierzchnię  $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3 + 8 = 0\}$  i izomorfizm afiniczny  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dany wzorem  $h((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 + 3, x_2 + 2x_3 - 1, x_2 + 2)$ .
  - a) W jakim układzie bazowym hiperpowierzchnia  $h(X)$  jest opisana równaniem  $5y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3 + 8 = 0$ ?
  - b) Jakim równaniem opisana jest hiperpowierzchnia  $h(X)$  w standardowym układzie bazowym?
3. Określić typ afiniczny krzywej  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_2 - 2 = 0\}$ . Wykonać schematyczny rysunek.
4. Określić typ afiniczny krzywej, która powstaje z przecięcia hiperpowierzchni  $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + x_3 = 0\}$  płaszczyzną  $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ . Wykonać schematyczny rysunek.
5. Określić typ afiniczny hiperpowierzchni  $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 2 = 0\}$ . Wykonać schematyczny rysunek.
6. Czy krzywe  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_2 + 8 = 0\}$  oraz  $Y = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 = 0\}$  są afinicznie izomorficzne? Jeśli tak, to podać przykład takiego izomorfizmu afinicznego  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , że  $Y = h(X)$ .
7. Dla jakich wartości parametrów  $r, s \in \mathbb{R}$  hiperpowierzchnie  $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2 + 9 = 0\}$ ,  $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (2r - 4)x_1^2 + x_2^2 + (1 - s)x_3^2 + 2x_2 + 3 = 0\}$  mają ten sam typ afiniczny?

Wszystkie rozwiązania powinny zawierać obliczenia lub rozumowania uzasadniające uzyskany wynik. Termin oddania prac: wtorek 31.05.2011, na ćwiczeniach.