KLASÓWKA

grupa I, 4 kwietnia 2000

1. (15 pkt) Zdarzenia A, B, C, D są niezależne
   a) czy zdarzenia $A \cap B, C \cup D$ muszą być niezależne?
   b) załóżmy, że $P(A) = P(B) = 0.2, P(C) = 0.5, P(D) = 0.7$, ile wynoszą prawdopodobieństwa $P(A \cap B | B \cap C)$ i $P(A \cup B \cup C \cup D)$?

2. (15pkt) Zmienna losowa X ma rozkład

$$\{(-3, \frac{1}{20})(-2, \frac{1}{10}), (-1, \frac{2}{10}), (0, \frac{3}{10})(1, \frac{5}{20})(2, \frac{1}{10})\}.$$

   a) Znajdź rozkład zmiennej losowej $X^2 + 2X$
   b) Oblicz $P(X > 0)$ i $P(X^3 - 3X > 0)$

3. (20 pkt) Pewien koszykarz trafia do tarczy z 90% skutecznością. Załóżmy, że wyniki kolejnych rzutów wykonywanych przez koszykarza są od siebie niezależne. Oblicz
   a) najbardziej prawdopodobną liczbę trafionych rzutów w 9 próbach
   b) prawdopodobieństwo, że 8 trafienie nastąpi w 9 rzucie
   c) prawdopodobieństwo, że drugie pudło nastąpi w 7dmym a czwarte w 12 rzucie.
   d) Wiadomo, ze w 10 próbach koszykarz spudłował nie więcej niż raz, jakie jest prawdopodobieństwo, że trzeci rzut był celny?

4. (25 pkt) Czterech tenisistów A,B,C,D co miesiąc rozgrywa miniturniej tenisowy. Na początek dzielą się losowo na dwie pary, które grają mecze półfinałowe, a później zwycięzcy obu pojedynków grają decydujący mecz (w tenisie nie ma możliwości remisu). Mecze toczą się od siebie niezależnie, a prawdopodobieństwa, że w pojedynczej grze A wygra z B jest 0.6, A wygra z C 0.7, A wygra z D 0.8, B wygra z C 0.6, B wygra z D 0.7, C wygra z D 0.5.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz D wygra cały turniej
   b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku gracz D wygra więcej niż jeden turniej?
   c) Która z drabinek turniejowych jest najbardziej korzystna dla gracza D?

5. (25pkt) Spośród liczb od 0 do 9999 wybrano losowo jedną. Niech X oznacza największą cyfrę wylosowanej liczby, zaś Y ilość różnych cyfr w wylosowanej liczbie.
   a) Znajdź rozkład X
   b) Oblicz $P(X \leq 2)$ i $P(Y \geq 2)$
   c) Oblicz prawdopodobieństwo, że X jest równe 8 jeśli wiadomo, że $Y = 4$
   d) Oblicz $P(X = Y = 3)$

6. (20 pkt*) Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów (np dla ciągu ROROOORROO $X_{10} = 3$). Wykaż, że
a) $\lim_{n\to\infty} P(X_n > \lambda \log_2 n) = 0$ dla $\lambda > 1$
b) $\lim_{n\to\infty} P(X_n > \lambda \log_2 n) = 1$ dla $\lambda < 1$.

KLASÓWKA

grupa II, 4 kwietnia 2000

1. (15pkt) Zmienna losowa X ma rozkład
$$\{(-4, \frac{1}{20})(-3, \frac{1}{10}), (-2, \frac{2}{10}), (0, \frac{3}{10})(1, \frac{5}{20})(2, \frac{1}{10})\}.$$
a) Znajdź rozkład zmiennej losowej $X^2 + X$
b) Oblicz $P(X < 0)$ i $P(X^3 - 5X > 1)$

2. (15 pkt) Zdarzenia A, B, C, D są niezależne
a) czy zdarzenia $A \cup B, C \cap D$ muszą być niezależne?
b) załóżmy, że $P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(C) = P(D) = 0.5$, ile wynoszą prawdopodobieństwa $P(A \cap B|C \cap D)$ i $P(A \cup B \cup C \cup D)$?

3. (25pkt) Spośród liczb od 0 do 99999 wybrano losowo jedną. Niech X oznacza największą cyfrę wylosowanej liczby, zaś Y ilość różnych cyfr w wylosowanej liczbie.
a) Znajdź rozkład X
b) Oblicz $P(X \leq 5)$ i $P(Y \geq 2)$
c) Oblicz prawdopodobieństwo, że X jest równe 9 jeśli wiadomo, że $Y = 5$
d) Oblicz $P(X = Y = 2)$

4. (20 pkt) Pewien koszykarz trafia do tarczy z 80% skutecznością. Załóżmy, że wyniki kolejnych rzutów wykonywanych przez koszykarza są od siebie niezależne. Oblicz
a) najbardziej prawdopodobną liczbę trafionych rzutów w 19 próbach
b) prawdopodobieństwo, że 6 trafienie nastąpi w 8 rzucie
c) prawdopodobieństwo, że trzecie pudło nastąpi w 7dmym a piąte w 14 rzucie.
d) Wiadomo, ze w 8 próbach koszykarz spudłował nie więcej niż raz, jakie jest prawdopodobieństwo, że szósty rzut był niecelny?

5. (25 pkt) Czterech tenisistów A,B,C,D co miesiąc rozgrywa miniturniej tenisowy. Na początek dzielą się losowo na dwie pary, które grają mecze półfinałowe, a później zwycięzcy obu pojedynków grają decydujący mecz (w tenisie nie ma możliwości remisu). Mecze toczą się od siebie niezależnie, a prawdopodobieństwa, że w pojedynczej grze A wygra z B jest 0.5, A wygra z C 0.4, A wygra z D 0.3, B wygra z C 0.4, B wygra z D 0.3, C wygra z D 0.5.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz A wygra cały turniej
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku gracz A wygra więcej niż jeden turniej?
c) Która z drabinek turniejowych jest najbardziej korzystna dla gracza A?

6. (20 pkt*) Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów (np dla ciągu ROROOORROO $X_{10} = 3$). Wykaż, że
a) $\lim_{n\to\infty} P(X_n > \lambda \log_2 n) = 0$ dla $\lambda > 1$
b) $\lim_{n\to\infty} P(X_n > \lambda \log_2 n) = 1$ dla $\lambda < 1$.