Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 13

1. Udowodnij, że dla dowolnych punktów x_n, x w przestrzeni metrycznej E $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy gdy $x_n \to x$.

2. Wykaż, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$.

3. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow c$ gdzie c jest stałą to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.

4. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
   a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X_n = k) \to P(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
   b) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?

5. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

6. * Niech g_{X_n}, g_X będą gęstościami rzeczywistych zmiennych losowych. Wykaż, że jeśli $g_{X_n}(t) \to g_X(t)$ dla p.w. t to $X_n \Rightarrow X$.

7. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n E|X_n|^p < \infty$ to $E|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $E|X_n|^p \to E|X|^p$. Jest to jednak prawdą gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n E|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

8. * Niech $x \in (0,1)$ będzie liczbą niewymierną. Wykaż,że
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\{kx \mathrm{mod} 1\}} \Rightarrow \lambda,$$
   gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$. Co się dzieje, gdy x jest wymierne?

9. a)* Wykazać, że dla rzeczywistych zmiennych losowych $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedu gdy istnieją zmienne losowe $\tilde{X}_n \sim X_n$ i $\tilde{X} \sim X$ takie, że X_n jest zbieżny do X według prawdopodobieństwa.
   b)** Udowodnij powyższe stwierdzenie gdy X_n, X mają wartości w dowolnej przestrzeni metrycznej (E, ρ).

10. Udowodnij, że ś dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n, X niezależne od Y oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$ to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

11. * Wykaż, że
    $$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon :\ \forall_t\ F_\mu(t-\varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t+\varepsilon) + \varepsilon\}$$
    definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilstycznych na R zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu \Leftrightarrow d(\mu_n, \mu) \to 0$).

12. ** Zmienne losowe X_n są niezależne. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 14

1. * Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz dystrybuanta F_X jest ciągła to F_{X_n} zbiega jednostajnie do F_X.

2. Niech X_n będzie pierwszą współrzędną rozkładu jednostajnego na kuli jednostkowej w R^n. Udowodnij, że $\sqrt{n}X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

3. Wykaż, że rodzina zmiennych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha| < \infty, \sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

4. ** Udowodnij, że twierdzenie Prochorowa zachodzi na przestrzeni polskiej tzn. metrycznej, zupełnej, ośrodkowej.

5. Oblicz funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów tzn.
   a) geometrycznego z parametrem p
   b) Poissona z parametrem λ
   c) dwumianowego z parametrami n, p
   d) jednostajnego na przedziale $[a, b]$
   e) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$
   f) eksponencjalnego z parametrem λ
   g) Cauchy'ego z parametrem h.

6. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

7. * Udowodnij, że jeśli $\varphi_X^{''}(0)$ istnieje to $EX^2 < \infty$

8. Wykaż, że dla zmiennych X przyjmujących tylko wartości całkowite zachodzi
$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt.$$

9. * Udowodnij, że jeśli X ma rozkład ciągły z gęstością g to $\varphi_X(t) \to 0$ dla $|t| \to \infty$.

10. Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcje a)φ^2, b) Reφ, c) $|\varphi|^2$, d) $|\varphi|$ muszą być funkcjami charakterystycznymi?

11. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi_X(t) \in R$ dla wszystkich t.

12. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 15

1. Udowodnij, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ to zmienna $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.

2. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.

3. Podaj przykład zmiennych losowych X_n takich, że $\varphi_{X_n} \to \varphi$ punktowo, ale φ nie jest funkcją charakterystyczna żadnego rozkładu na prostej.

4. * a) Udowodnij, że $\varphi(x) = (1 - |x|)I_{(-1,1)}(x)$ jest funkcją charakterystyczną
b) Udowodnij, że jeśli $\varphi : R \to R$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$, kawałkami liniowa oraz $\varphi(0) = 1$ to φ jest funkcją charakterystyczną.
c)Udowodnij, że jeśli $\varphi : R \to R$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$ to φ jest funkcją charakterystyczną.

5. Wykaż, że funkcja $e^{-|t|^\alpha}$
a*) jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leqslant 1$
b*) nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$
c**) jest funkcją charakterystyczną dla $1 < \alpha \leqslant 2$.

6. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in R$, a Y jest niezależną kopią X.

7. Udowodnij, że układ trójkątny $X_{n,k} = \frac{X_k}{\sqrt{n}}$, $k = 1, \dots, n$, gdzie $X_1, X_2, \dots$ są niezależnym zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie spełnia warunek Lindeberga.

8. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnym zmiennymi losowymi takimi, że
$$P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Udowodnij, że $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$ oraz
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0, 1) \text{ według rozkładu.}$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 16

1. Wykaż, że warunek Lyapunowa

$$\exists_{\delta>0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leqslant k_n} E|X_{n,k} - EX_{n,k}|^{2+\delta} = 0$$

implikuje warunek Lindeberga (zakładamy, że $s_n^2 \to \sigma^2$).

2. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu gdy } \lambda \to \infty.$$

3. * Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k\leqslant n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $P(X_i = a) = P(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

5. * Dana jest zmienna losowa X taka, że $EX^2 < \infty$ oraz $X \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + Z)$, gdzie Y, Z są niezależnymi kopiami X. Wykaż, że $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dla pewnego $\sigma \geqslant 0$.

6. * Czy z równości dwu funkcji charakterystycznych na pewnym otoczeniu zera wynika równość rozkładów?

7. ** Wykaż, że jeśli zmienne X i Y są niezależne oraz $X + Y$ ma rozkład normalny to obie zmienne X i Y są normalne.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 17

1. Rzucamy 1000 razy kostką. Oszacuj prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie między 3400 a 3600.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne przy czym $P(X_k = k) = P(X_k = -k) = 1/2$ Niech $s_n = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$ Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{s_n}.$$

3. Podaj przykład zależnych zmiennych losowych X, Y o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ takich, że $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

4. Udowodnij, że zmienna $X \sim \mathcal{N}(a,B)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy gdy B jest odwracalne oraz, że w tym ostatnim przypadku wynosi ona
$$g_X(x) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(\frac{(C(x-a), x-a)}{2}\right), \text{ gdzie } C = B^{-1}.$$

5. Załóżmy, że zmienne $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n})$ mają rozkład jednostajny na kuli $B(0, \sqrt{n})$ o środku w 0 i promieniu $\sqrt{n}$. Wykaż, że dla każdego k, zmienne $(X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,k})$ zbiegają według rozkładu do $\mathcal{N}(0, Id_k)$.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $EX_i = 0$, $EX_i^2 = 1$ oraz
$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leqslant [nt]} X_i \text{ dla } t \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots.$$
Udowodnij, że dla dowolnych $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ ciąg wektorów losowych $(S_n(t_1), S_n(t_2), \ldots, S_n(t_k))$ jest zbieżny według rozkładu. Jak wygląda rozkład graniczny?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 18

1. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $\tau - 1$, $\tau + 1$ też są momentami zatrzymania (przyjąć $T = N$)?

2. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B
a) $\tau_1 = \inf\{n : X_n \in B\}$ - pierwsza wizyta w zbiorze B
b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ - k-ta wizyta w zbiorze B.

3. Wykaż, że jeśli τ, σ są momentami zatrzymania $(T = N)$ to
a) jeśli $\tau \equiv t$ to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$
b) jeśli $\tau < \sigma$ to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$
c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t.

4. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmienymi losowymi takimi, że $P(X_i = \pm 1) = 1/2$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Wykaż, że $E\tau = \infty$.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $E|X_i| < \infty$ dla wszystkich i. Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy $EX_i = 1$ dla wszystkich i lub $X_1 = 0$ p.n.p.

7. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $EX_i^2 < \infty$. Znajdź liczby a_n, b_n dla których $S_n^2 + a_n S_n + b_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$.

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Dla $\lambda > 0$ znajdź liczby a_n takie, że $(e^{\lambda S_n - a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 19

1. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $EX_\tau = EX_0$.

2. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że $X_n = Y_n + Z_n$, gdzie Y_n jest martyngałem, a Z_n ciągiem prognozowalnym. Wykaż, że X_n jest nadmartyngałem wtedy i tylko wtedy gdy Z_n jest niemalejący.

3. Egzaminator przygotował na egzamin 20 zestawów pytań. Każdy z 15 zdających studentów losuje 1 zestaw, który później nie jest już używany. Student S zna odpowiedź na dokładnie 10 z 20 zestawów. Od wychodzących z egzaminu dowiaduje się jakie pytania są już wylosowane. Jaka jest optymalna strategia (wybór momentu wejścia na egzamin) maksymalizująca szanse zdania egzaminu przez S?

4. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie takim, że $EX_i^2 < \infty$. Udowodnij, że $E(S_\tau - \tau EX_1)^2 = E\tau V(X_1)$.

5. * $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś t liczbą rzeczywistą taką, że $\varphi_{X_n}(t) \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że
$$\frac{e^{itS_n}}{\prod_{j \leqslant n} \varphi_{X_j}(t)}, \text{ gdzie } S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$
jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n). Wywnioskuj stąd, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zbiega według rozkładu wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny p.n.p.

6. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą niesymetryczną.

7. Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

8. * Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygranie 1 zł. przez A w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

9. * Podaj przykład martyngału X_n takiego, że $X_n \to 0$ p.n.p. oraz $E|X_n| \to \infty$.

10. * Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=-\infty}^0$ będzie martyngałem (z tzw. czasem odwróconym). Udowodnij, że granica $X = \lim_{n\to-\infty} X_n$ istnieje. Co można powiedzieć o X?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 20

1. Podaj przykład martyngału takiego, że $\sup_n E|X_n| < \infty$, który nie jest zbieżny w L^1.

2. * Udowodnij, że dla podmartyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$
$$\forall_{t>0} P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k| > t) \leqslant 3 \frac{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} E|X_k|}{t}$$
oraz w przypadku $X_n \geqslant 0$ lub $X_n \leqslant 0$ dla wszystkich n, stałą 3 można zamienić na 1.

3. Wyprowadź z poprzedniego zadania nierówność Kołmogorowa
$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| > t) \leqslant \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$$
dla niezależnych zmiennych losowych X_i takich, że $EX_i = 0$.

4. * Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ zachodzi
$$E \sup_n |X_n| \leqslant C(1 + \sup_n E|X_n| \ln^+ |X_n|).$$

5. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe X_n są zbieżne w L^p, $p \geqslant 1$ to $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowalny (zatem $X_n \to X$ w L^p wtedy i tylko wtedy gdy $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa oraz $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowalny).

6. Wykaż, że jeśli X_t i Y_t są jednostajnie całkowalne to dla dowolnych $a, b \in R$, $aX_t + bY_t$ jest jednostajnie całkowalny.

7. Znajdź jednostajnie całkowalny ciąg X_n taki, że $E \sup_n |X_n| = \infty$.

8. Niech $\varphi : R_+ \to R_+$ spełnia warunek $\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_t E\varphi(|X_t|) < \infty$ to (X_t) jest jednostajnie całkowalny.

9. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie taki, że $E|X_i| < \infty$, niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$.
a) Udowodnij, że $(\frac{S_n}{n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem z czasem odwróconym.
b) Wywnioskuj stąd silne prawo wielkich liczb Kołmogorowa $\frac{S_n}{n} \to EX_i$ p.w. i w L^1.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 21

1. Dany jest zbiór przeliczalny E i funkcje borelowskie $\varphi_n : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne). Zmienne losowe X_0 o wartościach w E i $U_1, U_2, \ldots$ o wartościach rzeczywistych są niezależne. Udowodnij, że ciąg $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $X_{n+1} = \varphi_n(X_n, U_n)$ jest łańcuchem Markowa.

2. Dwa łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia P są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

3. Zmienne $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Czy ciągi $X_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $Y_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ są łańcuchami Markowa?

4. (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w E. Czy dla dowolnej funkcji $f : E \to E$, $(f(X_n))$ musi być łańcuchem Markowa?

5. Zmienne $X_0, X_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1) = p \in (0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $M_n = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Które z ciągów $|S_n|, M_n, M_n - S_n$ są łańcuchami Markowa? Znajdź odpowiednie macierze przejścia.

6. Udowodnij, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma właściwych podzbiorów zamkniętych.

7. Wykaż, że skończony łańcuch Markowa ma przynajmniej jeden stan powracający.

8. * Rozpatrzmy błądzenie w $\mathbb{Z}^k$ z macierzą przejścia $p_{x,y} = \frac{1}{2k}$ gdy $\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| = 1$ oraz $p_{x,y} = 0$ dla pozostałych x, y. Dla jakich k jest to błądzenie powracalne?

9. Wykaż, że jeśli y jest stanem chwilowym to $\sum_{n=0}^{\infty} p_{x,y}(n) < \infty$ dla wszystkich x, w szczególności $\lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = 0$.

10. * Udowodnij, że łańcuch Markowa jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy $F_{x,y} = 1$ dla wszystkich x, y.

11. * Dane są dwa niezależne błądzenia symetryczne X_n, Y_n na prostej (lub ogólniej w $\mathbb{Z}^k$). Czy $\mathbf{P}(\exists n \geqslant 1\ X_n = Y_n) = 1$ tzn. czy z prawdopodobieństwem 1 błądzenia się kiedyś przetną?

12. * Prawopodobieństwo, że bakteria ma n potomków wynosi p_n dla $n = 0, 1, \ldots$. Zakładając, że bakterie w ntym pokoleniu rozmnażają się równocześnie i niezależnie udowodnij, że populacja bakterii (licząca w chwili 0, $N > 0$ bakterii) nigdy nie wyginie z prawdopodobieństwem dodatnim wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k=0}^{\infty} kp_k > 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 22

1. Niech (X_n) będzie nieprzywiedlnym okresowym łańcuchem Markowa na E z macierzą przejścia P i okresem $d > 1$. Udowodnij, że istnieje rozkład $E = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_d$ taki, że zbiory S_i spełniają warunki:
   a) $p_{xy} > 0 \Leftrightarrow x \in S_i, y \in S_{i+1}$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, d$ (przyjmujemy $S_{d+1} = S_1$).
   b) na każdym S_i macierz $(p_{xy}(d))_{x,y \in S_i}$ definiuje nieprzywiedlny, nieokresowy łańcuch Markowa.

2. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.

3. Ciąg niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots$ ma wspólny rozkład taki, że $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = -1) = p$. Definiujemy rekurencyjnie ciąg X_n wzorami $X_0 = 1$, $X_{n+1} = \max(X_n, 1) + Y_n$. Wykaż, że ciąg ten jest łańcuchem Markowa. Znajdź rozkład stacjonarny o ile istnieje.

4. Wykaż, że w powracalnym i nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa każdy stan jest odwiedzany nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1.

5. W powiecie N. syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem 3/4, a syn niepiekarza z prawdopodobieństwem 1/100. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? A potomek w n-tym pokoleniu? Jaki procent ludzi w N. jest piekarzem?

6. * Udowodnij twierdzenie o istnieniu rozkładu stacjonarnego dla łańcuchów z przeliczalną przestrzenią stanów bez używania twierdzenia Brouwera.

7. Udowodnij, że dla łańcuchów Markowa ze skończoną przestrzenią stanów E i dowolnego niepustego podzbioru $F \subset E$ układy równań

$$\begin{cases} p_F(x) = 1 & \text{dla } x \in F \\ p_F(x) = \sum_{y \in E} p_{xy} p_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ p_F(x) = 0 & \text{jeśli } \forall_n \forall_{y \in F}\ p_{xy}(n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_F(x) = 0 & \text{dla } x \in F \\ m_F(x) = 1 + \sum_{y \in E} p_{xy} m_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ m_F(x) = \infty & \text{jeśli } p_F(x) < 1 \end{cases}$$

   mają dokładnie jedno rozwiązanie

8. Po wierzchołkach sześcianu porusza się w sposób losowy mucha - w każdym kroku z prawdopodobieństwem 1/3 przenosi się do jednego z sąsiednich wierzchołków. Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha powróci do punktu wyjścia nie odwiedzając wcześniej przeciwległego wierzchołka oraz średnią liczbę kroków jakie zajmie jej powrót do punktu wyjścia

W zadaniach 9–13 $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ jest procesem Wienera

9. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
 a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
 b) $Y_t = c^{-1/2}X_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
 c) $Z_t = tX_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
 d) $U_t = X_{T+t} - X_T, T \geqslant 0$
 e) $V_t = X_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2X_T - X - t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

10. Udowodnij, że W_t i $W_t^2 - t$ są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$.

11. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.p.

12. * Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

 jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n.p., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

13. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.