Trochę zadań kombinatorycznych

1. na ile sposobów można siedmiu stojących na peronie pasażerów umieścić w trzech wagonach?

2. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ umieszczamy 8 nierozróżnialnych wież szachowych tak aby żadne dwie nie biły się. Na ile to można zrobić sposobów? Jak zmieni się liczba sposobów jeśli założymy, że wieże są rozróżnialne?

3. Na ile sposobów można podzielić 24 studentów na dwie dwunastoosobowe grupy podczas kolokwium?

4. Na ile sposobów można wybrać pięcioosobową delegację z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek, tak by w skład delegacji wchodziło więcej chłopców niż dziewczynek?

5. Ile jest możliwości ustawienia 24 osobowej klasy w szeregu tak, by każdy uczeń stał na miejscu o numerze k, gdzie $k \geqslant n - 3$, zaś n oznacza numer ucznia na liście w dzienniku.

6. Na ile sposobów można wybrać 13 kart z 52–kartowej talii tak, by w pewnym kolorze mieć 7 kart, zaś w pozostałych po dwie karty?

7. Gramy w pokera talią 24 kartową. Na ile sposobów można otrzymać „z ręki" 5 kart stanowiących
   a) parę
   b) dwie pary
   c) trójkę
   d) fulla
   e) karetę
   f) kolor
   g) pokera?

8. Ile różnych (niekoniecznie sensownych) słów 12 literowych można ułożyć permutując litery słowa DEGRENGOLADA?

9. Na ile sposobów można wybrać trzy różne wierzchołki 12 kąta foremnego by tworzyły one trójkąt prostokątny? A rozwartokątny?

10. Na ile sposobów można rozdać 28 kostek domina czterem graczom?

11. Na ile sposobów można umieścić N listów w N zaadresowanych kopertach tak, by żaden nie trafił do właściwego adresata?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 1

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ takie, że $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Opisać wszystkie przestrzenie probabilistyczne z przeliczalnym zbiorem zdarzeń elementarnych Ω.

3*. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne.

4. Udowodnij następujące tożsamości

$$(\limsup A_n)' = \liminf(A_n'), (\liminf A_n)' = \limsup(A_n'),$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$

$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n,$$

$$A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A \text{ to } A = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

5. Wykaż, że jeśli $A_n = (-\infty, x_n)$ oraz $x = \limsup x_n$ to $\limsup A_n = (-\infty, x)$ lub $(-\infty, x]$ oraz oba te przypadki mogą zajść.

6. Udowodnij, że następujące dwie pseudometryki na $\mathcal{F}$

$$\rho_1(A, B) = P(A \Delta B)$$

$$\rho_2(A, B) = \begin{cases} \frac{P(A\Delta B)}{P(A\cup B)} & \text{jeśli } P(A \cup B) > 0 \\ 0 & \text{jeśli } P(A \cup B) = 0 \end{cases}$$

spełniają warunek trójkąta.

7*. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły pod rząd. Znaleźć prawdopodobieństwo, że rzucimy dokładnie k razy.

8. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każy uczeń będzie przepytany.

9. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich $2k$ butów przy czym $2k < n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.

10*. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

11. W n rozróżnialnych urnach umieszczono w sposób losowy k rozróżnialnych kul. Oblicz prawdopodobieństwo $p_m(k, n)$, że dokładnie m urn pozostanie pustych $0 \leqslant m \leqslant n - 1$. (Wskazówka: policz najpierw $p_0(k, n)$).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 2

1. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy jeśli wiadomo, że
a) mamy conajmniej jednego asa
b) mamy asa czarnego koloru
c) mamy asa pik
d) pierwszą wylosowaną kartą jest as
e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

3.* (schemat urnowy Polya) Urna zawiera b kul białych i c kul czarnych. Wykonujemy kolejno następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem do urny, a wraz z nią dokładamy do urny a kul tego samego koloru. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania w n-tym losowaniu kuli białej jest $\frac{b}{b+c}$.

4. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \ldots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma
a) conajmniej jedną córkę
b) dokładnie jedną córkę?
c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

5.* Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą aż pojawi się ciąg OOO lub ORO. Jeśli najpierw pojawi się OOO wygrywa gracz A, jeśli ORO gracz B.
a) Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 gra się zakończy
b) Jakie są szanse, że grę wygra gracz A?

6.* Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że grę wygra gracz A.
b) Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfałszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$?

7.* Udowodnij, że nie istnieje prawdopodobieństwo określone na wszystkich podzbiorach $\mathbb{Z}_+$ takie, że dla wszystkich k, $P(A_k) = 1/k$, gdzie A_k jest zbiorem liczb podzielnych przez k.

8.* Załóżmy, że koła rozłączne $B(x_i, r_i)$ są zawarte w pewnym prostokącie oraz pokrywają ten prostokąt z dokładnością do zbioru miary 0. Wykaż, że $\sum_i r_i = \infty$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 3

1. Podaj przykład rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ oraz dwu miar probabilistycznych pokrywających się na $\mathcal{A}$, ale nie na $\sigma(\mathcal{A})$.

2. Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń probabilistycznych
a) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})$
b*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})$ dla m nieparzystych
c*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geqslant \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})$ dla m parzystych.

3* Wykaż, że jeśli zdarzenia A_i są parami niezależne oraz $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)=\infty$ to $\mathbb{P}(\limsup A_i)=1$.

4. Na kiju długości l wybrano na chybił trafił 2 punkty i w tych punktach przełamano kij. Oblicz prawdopodobieństwo, że z otrzymanych 3 kawałków można zbudować trójkąt.

5. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo, że igła przetnie którąś z linii.

6* Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż d rzucono na płaszczyznę poliniowaną jak w poprzednim zadaniu. Oblicz prawdopodobieństwo, że wielokąt przetnie którąś z linii.

7* Udowodnij, że w definicji niezależności n zdarzeń każde z 2^n-n-1 równań jest niezbędne (tzn. jeśli odrzucimy jedno z równań to istnieją zdarzenia zależne spełniające wszystkie pozostałe równania).

8. Dla $A\in\mathcal{F}$ zdefiniujmy $A^1=A$ i $A^{-1}=A^{'}$. Udowodnij, że dla dowolnych $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ i $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ zdarzenia $A_1,\ldots,A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1},\ldots,A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne.

9. Oblicz prawdopodobieństwo, że w schemacie Bernoulliego w n próbach i prawdopodobieństwu sukcesu w pojedynczej próbie równym p będzie parzysta liczba sukcesów.

10. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą n razy, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?

11. Rzucamy wielokrotnie parą symetrycznych kości. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek równa 7 wypadnie przed sumą oczek 8.

12. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.

13. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń A_i?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 4

1* Niech $F : R \to [0,1]$ będzie prawostronnie ciągłą niemalejącą funkcją taką, że $F(\infty) = 1$ oraz $F(-\infty) = 0$. Na odcinku $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a skonstruuj zmienną losową, która ma dystrybuantę F.

2* Wykaż, że dwie ograniczone zmienne losowe X, Y są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}(X^n Y^m) = \mathbb{E}X^n \mathbb{E}Y^m$ dla dowolnych liczb naturalnych n i m.

3. Załóżmy, że $(E, \mathcal{E})$ jest przestrzenią mierzalną oraz $\mathcal{A}$ pewną klasą podzbiorów E taką, że $\sigma(A) = \mathcal{E}$. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ takimi, że $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ dla wszytkich $A \in \mathcal{A}$. Wykaż, że powyższe założenia nie implikują równości rozkładów X i Y.

4. a) Pokazać, że funkcje Rademachera $r_n(x) = \mathrm{sgn}(\cos(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |.|)$
b) dla $t \in [0,1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy np. to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |.|)$.

5. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (zob. zad. 4.). Dla skończonych podzbiorów A liczb całkowitych dodatnich zdefiniujmy funkcje Walsha

$$w_A = \begin{cases} \prod_{i \in A} \varepsilon_i & \text{jeśli } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{jeśli } A = \emptyset \end{cases}$$

a) znajdź rozkład w_A
b) wykaż, że w_A, w_B są niezależne gdy $A \neq B$. Czy w_A, w_B, w_C muszą być niezależne dla różnych indeksów A, B, C?

6. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku rosnącym $X_1^*(\omega) \leqslant X_2^*(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min(X_1, \ldots, X_n), X_n^* = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \ldots, n$ (X_k^* nazywamy k-tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \ldots, X_n$)

7. Niech $X_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant n_j, j = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, a f_j funkcjami mierzalnymi na $\mathbb{R}^{n_j}$. Czy zmienne $f_j(X_1^{(j)}, \ldots, X_{n_j}^{(j)})$, $j = 1, 2 \ldots$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

8* Załóżmy, że X, Y zmienne losowe takie, że X jest $\sigma(Y)$-mierzalne tzn. $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$.Udowodnij, że istnieje $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mierzalna taka, że $X = \varphi(Y)$.

9* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych. Określmy

$$Y := \limsup_{n \to \infty} X_n, \quad Z := \liminf_{n \to \infty} X_n.$$

Udowodnij, że Y i Z są zdegenerowanymi zmiennymi losowymi tzn. istnieją $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takie, że $\mathbb{P}(Y = c) = \mathbb{P}(Z = d) = 1$.

10* Czy na odcinku $[0,1]$ istnieją dwie niestałe funkcje ciągłe, będące niezależnymi zmiennymi losowymi względem miary Lebesgue'a?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 5

1. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r. Oblicz $\mathbb{P}(X < Y)$.

2. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrami λ i μ.

3. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

4. Na skrzyżowaniu ulic na pewnym kierunku światło czerwone świeci się 2 minuty, zaś światło zielone 1 minutę (zakładamy, że nie ma światła żółtego). W losowym momencie samochód przyjeżdża na skrzyżowanie, oznaczmy przez X długość oczekiwania na światło zielone.
a) Znajdź rozkład X
b) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

5* Niech X będzie „niestarzejącą się zmienną losową" tzn.

$$\forall_{t,s>0} \mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

(zakładamy, że $\mathbb{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t). Udowodnij, że X ma rozkład wykładniczy.

6* Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi Bernoulliego tzn. $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Jaki rozkład ma zmienna $X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon_i$?

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i)^4 \leqslant 3(\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i)^2)^2,$$

gdzie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ są takie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że stałej 3 nie można poprawić.

8* Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

9* Niech F będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Udowodnij, że jeśli F jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, to X ma rozkład ciągły.

10* Przy oznaczeniach jak w zadaniu 7 wykaż, że dla wszystkich $t \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i| \geqslant t) \leqslant 2\exp(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 6

1. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X.

2. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.

3. Niech X będzie miał rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Oblicz $E|X|^p$ dla $p \in \mathbb{R}$, jak wygląda ta liczba dla p naturalnych?

4* X jest rzeczywistą zmienną losową, udowodnij, że

$$\mathbb{E}|X|^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(|X| \geqslant t)dt.$$

5* Rzeczywista zmienna losowa X spełnia $E|X|^p < \infty$, udowodnij, że

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}(|X| \geqslant t) = 0.$$

6* (Nierówność Chinczyna) Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi Rademacherami tzn. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Udowodnij, że dla dowolnego $p > 0$ istnieje stała $C_p < \infty$ zależna tylko od p taka, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$(\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|^p)^{1/p} \leqslant C_p\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

7* X jest nieujemną zmienną losowa, udowodnij, że dla $\lambda \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(X > \lambda EX) \geqslant (1-\lambda)^2\frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$

8. Niech (ε_i) będą jak w zadaniu 7. Wykaż, że istnieje stała uniwersalna $c > 0$ taka, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$
a*) $\mathbb{P}\big(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\big) \geqslant c$
b**) $\mathbb{P}\big(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\big) \geqslant c.$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 7

1. a) $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, jaki rozkład ma $bX + c$ dla $b, c \in \mathbb{R}$?
   b) $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, znajdź rozkład e^X (tzw. rozkład lognormalny).
   c) X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, jaki rozkład mają zmienne $X + Y, X - Y$, czy są niezależne?

2. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. Jaki rozkład mają zmienne $X + Y$ oraz $X^2 + Y^2$?

3. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie eksponencjalnym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

4. Jaki rozkład ma zmienna $X - Y$, jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym?

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Zdefiniujmy $S_0 = 0, S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, \ldots$. Dla $t > 0$ niech $N_t = \sup\{n : S_n \leqslant t\}$. Wykaż, że N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt.

6. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrami h_1 i h_2, udowodnij, że $X + Y$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $h_1 + h_2$ (inaczej jeśli X, Y niezależne o standardowym rozkładzie Cauchy'ego to $h_1 X + h_2 Y \sim (h_1 + h_2)X$).

7. Niezależne zmienne losowe X, Y przyjmują wartości w $T = \{z \in C : |z| = 1\}$. Co można powiedzieć o rozkładzie XY jeśli X ma rozkład jednostajny na T?

8* $X_0, X_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $N = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz EN.

9* Udowodnij, że dla $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ rozkład $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n$ nie jest ciągły ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi takimi, że $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$).

10* Niech Z będzie zmienną losową Cauchy'ego z parametrem 1. Udowodnij, że zmienne

$$Z_2 = \frac{2Z}{1 - Z^2}, Z_3 = \frac{3Z - Z^3}{1 - 3Z^2}, \ldots, Z_n = \frac{\binom{n}{1}Z - \binom{n}{3}Z^3 + \binom{n}{5}Z^5 - \ldots}{1 - \binom{n}{2}Z^2 + \binom{n}{4}Z^4 - \ldots}, \ldots$$

mają rozkład Cauchy'ego.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 8

1. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, zaś Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(Y|X)$.

2* Zmienne losowe X, Y są niezależne o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że
$$\mathbb{E}(X|X+Y) = \mathbb{E}(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2} \text{ p.n.}$$

3* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie oraz $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$. Znajdź dla $i, n \geqslant 1$
$$\mathbb{E}(X_i|S_n, S_{n+1}, \ldots) := \mathbb{E}(X_i|\sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)).$$

4. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

5. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} & \text{jeśli } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$
Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$.

6. X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1, zaś Y - zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem X.
a) Znajdź rozkład Y,
b) Oblicz $\mathbb{P}(X > r|Y)$.

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, a]$, oblicz $\mathbb{E}(X_1|\max(X_1, \ldots, X_n))$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 9

1. Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ z gęstością $f(x,y)$ względem miary Lebesgue'a (czyli $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x,y)dxdy$). Niech $\mathcal{G} = \{A \times \mathbb{R} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Znajdź $\Pi(\cdot|\mathcal{G})$ rozkład warunkowy $\mathbb{P}$ względem $\mathcal{G}$.

2. (Wersja twierdzenia Bayesa dla rozkładów warunkowych) Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podciałem, zaś $\Pi(\cdot|\mathcal{G})$ regularnym rozkładem warunkowym $\mathbb{P}$ względem $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla wszystkich $G \in \mathcal{G}, A \in \mathcal{F}$ takich, że $\mathbb{P}(A) > 0$ zachodzi
$$\mathbb{P}(G|A) = \frac{\int_G \Pi(A|\mathcal{G})(\omega)d\mathbb{P}(\omega)}{\int_\Omega \Pi(A|\mathcal{G})(\omega)d\mathbb{P}(\omega)}.$$

3* Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podciało. Udowodnij, że
a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t|\mathcal{G})dt$ p.n.
b) $\mathbb{P}(X > t|\mathcal{G}) \leqslant t^{-k}\mathbb{E}(X^k|\mathcal{G})$ p.n.

4. Zmienne X i Y są niezależne, a f jest borelowską funkcją dwu zmiennych. Wykaż, że
$$\mathbb{E}(f(X,Y)|Y=y) = \mathbb{E}f(X,y) \text{ p.}n.$$

5* Oblicz $\mathbb{E}(X|X^2+Y^2)$ i $\mathbb{E}(X^2|X+Y)$, gdy X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-1,1]$.

6* X jest zmienną losową taką, że $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wykaż, że $\lim_{p\to 0+}(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} = \|X\|_0 := \exp(\mathbb{E}\ln|X|)$ (przyjmujemy, że $e^{-\infty} = 0$).

7. Dla $p < 0$ określmy podobnie jak dla $p > 0$, $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ używając dodatkowej konwencji $\infty^\alpha = 0$ dla $\alpha < 0$. Wykaż, że $\|X\|_q \leqslant \|X\|_p$ dla $-\infty < q \leqslant p \leqslant \infty$.

8. Udowodnij, że $\lim_{p\to\infty}\|X\|_p = \|X\|_\infty := \text{esssup}|X|$.

9* Udowodnij, że funkcja $f(r) := r\ln\mathbb{E}|X|^{1/r}$ jest wypukła dla $r \in (0,\infty)$.

10* (Ogólna postać nierówności Chinczyna) Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieje stała $C_{p,q} < \infty$ taka, że dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$
$$(\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|^p)^{1/p} \leqslant C_{p,q}(\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|^q)^{1/q}$$
($\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ - niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$)

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 10

1. Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ określmy

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mierzalne}\}.$$

Dla $X, Y \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ niech

$$d_1(X,Y) := \mathbb{E}\min(1, |X-Y|), \quad d_2(X,Y) := \mathbb{E}\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}.$$

Wykaż, że metryki d_1 i d_2 są równoważne oraz zbieżność w każdej z tych metryk jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

2* Wykaż, że zbieżność prawie wszędzie jest niemetryzowalna tzn. nie istnieje metryka na $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, która metryzowałaby zbieżność prawie na pewno.

3. Udowodnij, że dla dowolnych zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y
a) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$
b) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ to $lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon) = 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$

4. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ to $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + bY$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b.

5* Udowodnij nierówność Levy'ego: jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi to dla $t > 0$

$$\mathbb{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|S_k\| \geqslant t) \leqslant 2\mathbb{P}(\|S_n\| \geqslant t),$$

gdzie $S_k = X_1 + \ldots + X_k$.

6* Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha $(F, \|.\|)$ dla dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|S_k\| \geqslant Ct) \leqslant C\mathbb{P}(\|S_n\| \geqslant t),$$

gdzie $S_k = X_1 + \ldots + X_k$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 11

1. Udowodnij, że dla ciągu nieujemnych zmiennych losowych X_i, $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\frac{X_i}{1+X_i} < \infty$.

2* Zmienne X_i oraz ε_i są niezależne przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $\sum \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.w. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 < \infty$ p.n. (proszę udowodnić ten fakt bez odwoływania się do twierdzenia Kołmogorowa o trzech szeregach)

3. Zmienne ε_i są zdefiniowane jak w poprzednim zadaniu, wykaż, że dla liczb rzeczywistych a_i szereg $\sum a_i \varepsilon_i$ jest zbieżny p.w. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum a_i^2 < \infty$.

4* Z poprzedniego zadania wynika, że $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\varepsilon_n$ jest zbieżny p.w. Czy S ma rozkład ciągły?

5. Dla $0 < \lambda < 1/2$ zdefiniujmy zmienną losową $S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n$. Wykaż, że S_λ ma ciągłą dystrybuantę oraz czysto singularny rozkład tzn. istnieje zbiór borelowski A miary Lebesgue'a zero taki, że $\mathbb{P}(S_\lambda \in A) = 1$.

6* Wykaż, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych X_i o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha szereg $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ jest zbieżny wg prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny p.n.

7. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $p_n = P(A_n)$, $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że

$$\frac{N_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \to 0$$

wg prawdopodobieństwa.

8* Funkcja rzeczywista f jest ciągła na $[0,1]^2$. Dla $x, y \in [0,1]$ określmy

$$B_{f,n}(x,y) = \sum_{k,l=0}^{n} f(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) \binom{n}{k} \binom{n}{l} x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{n-l}.$$

Udowodnij, że $B_{f,n}(x,y)$ zbiega jednostajnie do $f(x,y)$ na $[0,1]^2$.

9. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie, $0 \leqslant X_i < 1$ p.n., udowodnij, że $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \to 0$ p.n.

10* Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają jednakowy rozkład i spełniają słabe prawo wielkich liczb tzn. $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Czy wynika stąd, że:
a) $t\mathbb{P}(|X_1| \geqslant t) \to 0$ gdy $t \to \infty$;
b) $\mathbb{E}|X_1| < \infty$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 12

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Pokazać, że ciągi zmiennych losowych

$$a)\ \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}, \quad b)\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$

są zbieżne prawie na pewno i znaleźć ich granice.

2. Dla ciągu $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie o skończonej wariancji definiujemy średnią empiryczną $\bar{m}_n$ i dystrybuantę empiryczną $\bar{\sigma}_n^2$ wzorami

$$\bar{m}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \quad \bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{m}_n)^2.$$

Udowodnij, że $\mathbb{E}\bar{m}_n = \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}\bar{\sigma}_n^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ (tzn. $\bar{m}_n$ i $\bar{\sigma}_n^2$ są nieobciążonymi estymatorami średniej i wariancji) oraz $\bar{m}_n \to \mathbb{E}X_1$, $\bar{\sigma}_n^2 \to \mathrm{Var}(X_1)$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$.

3* Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie taki, że $\mathbb{E}X_i = \infty$ (tzn $\mathbb{E}X_1^- < \infty$ oraz $\mathbb{E}X_i^+ = \infty$). Udowodnij, że $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to \infty$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$ dla pewnego $p \in (1/2, 1]$. Wykaż, że $X_1 + \ldots + X_n \to \infty$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$. Co się dzieje, gdy $p = 1/2$?

5** (Silne prawo wielkich liczb Marcinkiewicza) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi jednakowo rozłożonymi zmiennymi losowymi oraz $0 < p < 2$. Udowodnij, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n^{1/p}} \to \infty \text{ p.n.}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ oraz dodatkowo $\mathbb{E}X = 0$ dla $1 \leqslant p < 2$.

6* Przy założeniach poprzedniego zadania udowodnij, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \to \infty \text{ p.n.}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $X_i = 0$ p.n..

7** Udowodnić, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są rzeczywistymi zmiennymi losowymi parami niezależnymi o jednakowym rozkładzie takimi, że $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ to zachodzi Mocne Prawo Wielkich Liczb tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mathbb{E}X_1 \text{ p.n.}$$