Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 1

Mówimy, że
i) ciąg miar probabilistycznych μ_n *zbiega słabo* do miary probabilistycznej μ (ozn. $\mu_n \Rightarrow \mu$), jeśli $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ dla dowolnej funkcji ciągłej ograniczonej f.
ii) zmienne losowe X_n *zbiegają według rozkładu* do zmiennej losowej X (ozn. $X_n \Rightarrow X$), jeśli $\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$, czyli dla dowolnej funkcji ciągłej ograniczonej f, $\mathbf{E}f(X_n) \to \mathbf{E}f(X)$.

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb x_n, x,
$$\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x_n \to x.$$
2. Wykaż, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$.
3. Podać przykład rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ, takich, że $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale $\mu_n(A) \not\to \mu(A)$ dla pewnego zbioru A.
4. Wykaż, że:
a) jeśli $X_n \to X$ p.n., to $X_n \Rightarrow X$;
b) jeśli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \Rightarrow X$;
c) jeśli $X_n \Rightarrow c$, gdzie c jest stałą, to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.
5. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
b) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?
6. Czy teza punktu a) poprzedniego zadania się zmieni, jeśli zmienne X_n przyjmują wartości wymierne?
7. Niech $\mathrm{Bin}(p, n)$ oznacza rozkład Bernoulliego o n próbach z prawdopodobieństwem sukcesu p, a $\mathrm{Poiss}(\lambda)$ - rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że jeśli $p_n n \to \lambda$, to $\mathrm{Bin}(p_n, n) \Rightarrow \mathrm{Poiss}(\lambda)$.
8. Podaj przykład ciągu dystrybuant F_n, zbieżnego punktowo do funkcji, która nie jest dystrybuantą.
9. Podaj przykład ciągu zmiennych losowych X_n, zbieżnego wg rozkładu, takiego, że odpowiadający mu ciąg dystrybuant nie zbiega punktowo do dystrybuanty rozkładu granicznego.
10. Wykaż, że zmienne losowe mające gęstości mogą zbiegać do stałej.
11. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.
12. Niech X będzie niezdegenerowaną zmienną losową. Wykaż, że zmienne $a_n X + b_n$ zbiegają według rozkładu do zmiennej $aX + b$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$ i $b_n \to b$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 2

1. Co trzeba założyć o funkcji f, by z tego, że X_n jest zbieżne według rozkładu do X wynikała zbieżność według rozkładu $f(X_n)$ do $f(X)$?

2. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$, to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbf{E}|X_n|^p \to \mathbf{E}|X|^p$. Jest to jednak prawdą, gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

3. Niech g_n, g oznaczają odpowiednio gęstości rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ na $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że jeśli $g_n \to g$ p.w., to $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale niekoniecznie na odwrót.

4. Niech X będzie rzeczywistą zmienną losową. Wykaż, że istnieje ciąg zmiennych X_n zbieżny według rozkładu do X taki, że
   a) każde X_n przyjmuje tylko skończenie wiele wartości,
   b) zmienne X_n mają gęstość.

5. Wykazać, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n, X jest niezależne od Y oraz $X_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow Y$, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

6. Wykaż, że rodzina rozkładów normalnych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha|$, $\sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

7. Dana jest rodzina rozkładów

   a) wykładniczych $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$,

   b) jednostajnych $\{U(a,b) : a, b \in A,\ a < b\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

   Jaki warunek musi spełniać zbiór A, aby ta rodzina była ciasna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 3

1. Załóżmy, że ciąg zmiennych losowych X_n zbiega według rozkładu do zmiennej X o rozkładzie ciągłym. Wykaż, że dystrybuanty X_n zbiegają jednostajnie do dystrybuanty X.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0, a]$, zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

3. Wykaż, że wzór

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ \forall_t \ F_\mu(t - \varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t + \varepsilon) + \varepsilon\}$$

   definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilstycznych na $\mathbb{R}$ zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu \Leftrightarrow d(\mu_n, \mu) \to 0$).

4. Oblicz funkcje charakterystyczne rozkładów
   i) dyskretnych - dwupunktowego, geometrycznego, Bernoulliego, Poissona;
   ii) ciągłych - normalnego, jednostajnego, wykładniczego, dwustronnego wykładniczego.

5. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 4

1. Korzystając z funkcji charakterystycznej oblicz $\mathbf{E}X^k$ dla $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. Pokaż, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.

3. Wiadomo, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcjami charakterystycznymi są : φ^2, $\mathrm{Re}\varphi$, $|\varphi|^2$, $|\varphi|$?

4. Zmienne losowe $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a X_i rozkład jednostajny na $[0,1]$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{N} X_i$ (przyjmujemy, że ta suma jest równa 0 dla $N=0$).

5. Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbf{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,
$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi_X(t) dt.$$

6. Wykaż, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej X ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na $[-1,1]$. Czy istnieje niezależna od niej zmienna losowa Y taka, że rozkłady zmiennych $X+Y$ i $\frac{1}{2}Y$ są takie same?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 5

1. Wykaż, że istnieje $t \neq 0$ takie, że $|\varphi_X(t)| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{P}(X \in a + b\mathbb{Z}) = 1$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Przy pomocy funkcji charakterystycznych sprawdź, że jeśli ε_n są niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi przyjumjącymi wartości ± 1, to zmienna losowa $\sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} \varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.

3. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich t.

4. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X i $X+Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnij, że zmienna Y ma także rozkład normalny lub jest stała p.n.

5. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że zmienna $X - Y$ ma ten sam rozkład, co zmienna εX.

6. Znajdź funkcję charakterystyczną rozkładu Cauchy'ego.

7. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

8. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.

9. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a Y jest niezależną kopią X?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 6

1. Wykaż, że dla $\alpha > 2$ nie istnieje zmienna losowa taka, że $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$.

2. Załóżmy, że zmienne X i Y są niezależne, mają jednakowy rozkład oraz dla dowolnych liczb a, b zmienna $aX + bY$ ma ten sam rozkład co zmienna $(|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{1/\alpha} X$. Wykaż, że $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ dla pewnego $c \geqslant 0$.

3. Dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0,1)$. Wykaż, że jeśli $(a_n)_n$ jest takim ciągiem liczb dodatnich, że $a_n \to 0$, $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to zmienne $a_n X_n$ zbiegają słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

4. Podaj przykład zmiennych losowych X_n takich, że $\varphi_{X_n} \to \varphi$ punktowo, ale φ nie jest funkcją charakterystyczna żadnego rozkładu na prostej.

5. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracja po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonują losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

6. W pewnym stanie w wyborach prezydenckich głosuje 500.000 osób. Zakładając, że wyborcy głosują na każdego z dwu kandydatów z prawdopodobieństwem 50% jaka jest szansa, że różnica między kandydatami będzie mniejsza niż 100 głosów?

7. Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób popierających pewną partię polityczną. Chcemy by błąd był mniejszy niż 1% z prawdopodobieństwem 0.95? Ile w tym celu musimy przepytać osób? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli wiemy, że partię popiera nie więcej niż 10% wyborców?

8. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0,517. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt?

9. Rzucono 1000 razy kostką. Oszacuj prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

10. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$, o wspólnym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 0 i dodatnią wariancją. Wyznacz w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^\alpha} \right| > a \right).$$

11. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = a) = \mathbf{P}(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 7

1. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że
$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu gdy } n \to \infty.$$

2. Udowodnij, że
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k\leqslant n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

3. Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, to
a) $X_n + Y_n \Rightarrow c + X$,
b) $X_n Y_n \to cX$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$. Zbadaj zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że
$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Wykaż, że
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$
ale $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$.

6. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową, taką, że $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$, gdzie Y, Z - niezależne kopie X. Wykaż, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

7. Załóżmy, że zmienne X_k są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_k = \pm 1) = 1/2$ zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-3/2}(X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n)$.

8. Zmienne X_i są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-1/2}(X_1 + X_2^3 + \ldots + X_n^{2n-1})$.

9. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o średniej zero i wariancji 1. Ciąg (a_n) jest ograniczony oraz $s_n = (a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_n^2)^{1/2} \to \infty$. Wykaż, że $\frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n}{s_n}$ zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(0,1)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 8

1. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, zaś Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znajdź $\mathbf{E}(X|Y)$ oraz $\mathbf{E}(Y|X)$.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
a) 0blicz $\mathbf{E}(S_n|X_1)$, $\mathbf{E}(S_n^2|X_1)$.
b) Dla $n \geqslant k$ wyznacz $\mathbf{E}(S_n|S_k)$, $\mathbf{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbf{E}(e^{-S_n}|S_k)$.

3. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}X$.

4. Zmienne X i Y są niezależne, a f jest borelowską funkcją dwu zmiennych taką, że $\mathbf{E}|f(X,Y)| < \infty$. Wykaż, że $\mathbf{E}(f(X,Y)|Y) = g(Y)$ p.n., gdzie $g(y) = \mathbf{E}f(X,y)$.

5. Załóżmy, że zmienne X, Y przyjmują wartości naturalne oraz
$$\mathbf{P}(X = k, Y = l) = \begin{cases} \frac{1}{l2^l} & \text{dla } 1 \leqslant k \leqslant l \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} .$$
Oblicz $\mathbf{E}(X|Y)$.

6. Wektor losowy (X,Y) ma gęstość
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} & \text{jeśli } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$
Znajdź $\mathbf{E}(X|Y)$.

7. Zmienne X i Y są całkowalne, niezależne i mają jednakowy rozkład. Wykaż, że $\mathbf{E}(X|X+Y) = \mathbf{E}(Y|X+Y) = \frac{1}{2}(X+Y)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 9

1. Załóżmy, że X jest całkowalną zmienną losową, $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ σ-ciałami, przy czym $\mathcal{G}_2$ jest niezależne od X i $\mathcal{G}_1$. Wykaż, że $\mathbf{E}(X|\sigma(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)) = \mathbf{E}(X|\mathcal{G}_1)$.

2. Załóżmy, że ε_i są niezależnymi zmiennymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Oblicz $\mathbf{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3 | \varepsilon_1\varepsilon_2)$ oraz $\mathbf{E}(\varepsilon_1\varepsilon_2 | \varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3)$.

3. Wektor (X, Y) ma łączny rozkład gaussowski o średniej zero taki, że $\mathrm{Var}(X) = \sigma_1^2$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_2^2$ oraz $\mathrm{Cov}(X, Y) = c$. Oblicz $\mathbf{E}(X|Y)$ oraz $\mathbf{P}(X \geqslant 0|Y)$.

4. Wiemy, że p-procent monet jest sfałszowanych - po obu stronach mają orły. Losujemy ze zwracaniem n monet i za każdym razem ją rzucamy. Niech F oznacza liczbę wylosowanych fałszywych monet, a O liczbę wyrzuconych orłów. Udowodnij, że $\mathbf{E}(F|0) = \frac{2p}{p+100}O$.

5. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $\tau - 1$, $\tau + 1$ też są momentami zatrzymania?

6. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B:
   a) $\tau_1 = \inf\{n : X_n \in B\}$ – pierwsza wizyta w zbiorze B,
   b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ – k-ta wizyta w zbiorze B.

7. Niech τ i σ będą momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że
   a) jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
   b) jeśli $\tau < \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$,
   c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t.

8. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

9. Podaj przykład momentu zatrzymania τ, takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 10

1. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonej wariancji i średniej zero oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Wykaż, że S_n i $S_n^2 - \mathrm{Var}(S_n)$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez X_n.

2. Załóżmy, że $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Niech $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$.
a) Znajdź wszystkie liczby a takie, że $(a^n \cos(S_n), \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.
b) Wykaż, że dla dowolnego $\lambda > 0$, ciąg $(\exp(\lambda S_n - n\lambda^2/2), \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{E}|X_i| < \infty$ dla wszystkich i. Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez X_n wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{E}X_i = 1$ dla wszystkich i lub $X_1 = 0$ p.n..

4. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0. Wykaż, że ciąg Z_n dany wzorem $Z_0 = 0$ $Z_n = X_0X_1 + X_1X_2 + \ldots + X_{n-1}X_n$, $n \geqslant 1$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

5. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$. Znajdź liczby a_n, b_n dla których $S_n^2 + a_nS_n + b_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$.

6. Niech $t \in \mathbb{R}$ oraz $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$. Przyjmijmy $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź wszystkie ciągi (a_n) takie, że $(e^{itS_n + a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 11

1. Ciąg (X_n) jest martyngałem. Zbadaj, czy są pod- bądź nadmartyngałami ciągi:
   a) $(|X_n|^p)_n$ $p \geqslant 1$;
   b) $(X_n \wedge a)_n$;
   c) $(X_n \vee a)_n$;
   d) $(X_n^3)_n$.

2. (*Tożsamość Walda*) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, a τ momentem zatrzymania względem filtracji generowanej przez X_n. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, wykaż, że $\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}\tau\mathbf{E}X_1$, o ile $\mathbf{E}\tau < \infty$.

3. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą symetryczną.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1)$. Przyjmując $S_0 = 0$ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ znajdź wszystkie liczby rzeczywiste λ dla których λ^{S_n} jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n).

5. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą niesymetryczną.

6. Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę monetą symetryczną i niesymetryczną.

7. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmienymi losowymi takimi, że $P(X_i = \pm 1) = 1/2$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

8. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie takim, że $EX_i^2 < \infty$. Udowodnij, że dla dowolnego momentu zatrzymania względem filtracji generowanej przez (X_n) takiego, że $\mathbf{E}\tau < \infty$ zachodzi $\mathbf{E}(S_\tau - \tau\mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau\mathrm{Var}(X_1)$. Czy wzór ten musi być prawdziwy bez założenia o skończoności $\mathbf{E}\tau$?

9. Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygranie 1 zł. przez A w grze orła i reszkę
   a) monetą symetryczną
   b) monetę niesymetryczną.

10. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 12

1. Niech $(\varepsilon_n)_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych o wartościach ± 1. Wykaż, że nadmartyngał
$$Z_n := e^{a(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n)-(na^2/2)}$$
jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w L_1?

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0,2]$. Wykaż, że
$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$
tworzą martyngał (względem filtracji generowanej przez X_n) zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w L_1 .

3. Podaj przykład martyngału X_n takiego, że $X_n \to 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}|X_n| \to \infty$.

4. Wykaż, że jeśli (X_i) i (Y_i) są jednostajnie całkowalne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $(aX_i + bY_i)$ jest jednostajnie całkowalny.

5. Znajdź jednostajnie całkowalny ciąg X_n taki, że $\mathbf{E}\sup_n |X_n| = \infty$.

6. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunek $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_i \mathbf{E}\varphi(|X_i|) < \infty$, to (X_i) jest jednostajnie całkowalny.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 13

1. Zmienne $\varepsilon_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Rozstrzygnij, które z podanych poniżej procesów są łancuchami Markowa.
   a) $X_0 = 0$, $X_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$
   b) $Y_0 = 1$, $Y_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$, , $n = 1, 2, \ldots$
   c) $Z_n = (-1)^{\varepsilon_n}$, , $n = 1, 2, \ldots$
   d) $W_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$
   e) $V_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$, $n = 1, 2 \ldots$.

2. Załóżmy, że E jest zbiorem przeliczalnym, $f\colon E \times \mathbb{R} \to E$ jest funkcją mierzalną (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne), Y_0 pewną zmienną o wartościach w E, zaś $X_0, X_1, \ldots$ ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Definiujemy
$$Y_{n+1} = f(X_n, Y_n) \text{ dla } n = 0, 1, \ldots .$$
   Wykaż, że (Y_n) jest łańcuchem Markowa.

3. Dwa jednorodne łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia P są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

4. (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w E. Wykaż, że dla dowolnej funkcji różnowartościowej $f : E \to E$, $(f(X_n))$ jest łańcuchem Markowa. Czy tak być musi, jeśli nie założymy różnowartościowości f?

5. Dla łańcuchów Markowa o przestrzeni stanów $\{1, 2, 3, 4\}$ i poniższych macierzach przejścia znajdź wszystkie stany nieistotne i wszystkie zamknięte zbiory stanów.
$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

7. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy pod rząd cztery orły. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

8. Macierz przejścia łańcucha Markowa $(X_n)_n$ na przestrzeni $S = \{1, 2, 3, 4\}$ dana jest następująco:
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Czy jest to łańcuch nieprzywiedlny?
   b) Oblicz prawdopodobieństwo przejścia w dwu krokach ze stanu 1 do stanu 2.
   c) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. oblicz prawdopodobieństwo tego, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.
   d) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. oblicz wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 14

1. Zbadaj okresowość łańcuchów o poniższych macierzach przejścia:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Jednorodny łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $\{0, 1, 2\dots\}$ ma macierz przejścia $(p_{n,m})_{n,m\geqslant 0}$ taką, że $p_{0,1} = 1$, $p_{n,n+1} = 1 - p_{n,n-1} = p$ dla $n = 1, 2\dots$, gdzie $p \in (0, 1)$. W zależności do parametru p wyznacz wszystkie rozkłady stacjonarne.

3. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.

4. Zmienne $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$. Ciąg zmiennych $X_1, X_2, \dots$ jest określony następująco: $X_0 \equiv 1$ p.n., a dla $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } Y_n = 1, \\ X_n Y_n & \text{jeśli } Y_n \neq 1. \end{cases}$$

a) Wykaż, że $(X_n)_n$ jest nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa.
b) Czy ten łańcuch jest okresowy?
c) Udowodnij, że wszystkie stany są powracające.

5. Rozważamy symetryczne błądzenie losowe (X_n) po kracie $\mathbb{Z}^2$, tzn. ze stanu (i, j) przechodzimy z równymi prawdopodobieństwami do jednego ze stanów $(i+1, j)$, $(i-1, j)$ $(i, j+1)$ i $(i, j-1)$. Czy łańcuch Markowa (X_n) jest
a) okresowy,
b) powracalny?
c) Czy istnieje rozkład stacjonarny?

6. Dany jest łańcuch Markowa X_n startujący ze stanu i. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 1\colon X_n \neq i\}$. Wykaż, że τ ma rozkład geometryczny.

7. (X_n) jest łańcuchem Markowa, czy wynika stąd, że
a) $\mathbf{P}(X_n = a_{k+1}|X_{i_k} = a_k, X_{i_{k-1}} = a_{k-1}, \dots, X_{i_1} = a_1) = \mathbf{P}(X_n = a_{k+1}|X_{i_k} = a_k)$ dla dowolnych liczb całkowitych $0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k < n$ oraz stanów $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$?
b) $\mathbf{P}(X_n \in A_{k+1}|X_{i_k} \in A_k, X_{i_{k-1}} \in A_{k-1}, \dots, X_{i_1} \in A_1) = \mathbf{P}(X_n \in A_{k+1}|X_{i_k} \in A_k)$ dla dowolnych liczb całkowitych $0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k < n$ oraz zbiorów stanów $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$?