

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 13

1. Udowodnij, że dla dowolnych punktów x_n, x w przestrzeni metrycznej E $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy gdy $x_n \rightarrow x$.
2. Wykaż, że $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0, 1]$.
3. Wykaż, że:
 - a) jeśli $X_n \rightarrow X$ p.n., to $X_n \Rightarrow X$;
 - b) jeśli $X_n \rightarrow X$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \Rightarrow X$;
 - c) jeśli $X_n \Rightarrow c$ gdzie c jest stałą to $X_n \rightarrow c$ według prawdopodobieństwa.
4. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
 - a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbf{P}(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k .
 - b) Czy z istnienia granic $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?
5. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \rightarrow a$, $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$.
- 6* Niech g_{X_n}, g_X będą gęstościami rzeczywistych zmiennych losowych. Wykaż, że jeśli $g_{X_n}(t) \rightarrow g_X(t)$ dla p.w. t to $X_n \Rightarrow X$.
7. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$ to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbf{E}|X_n|^p \rightarrow \mathbf{E}|X|^p$. Jest to jednak prawdą gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.
- 8* Niech $x \in (0, 1)$ będzie liczbą niewymierną. Wykaż, że

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\{kx \bmod 1\}} \Rightarrow \lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0, 1]$. Co się dzieje, gdy x jest wymierne?

- 9* Wykazać, że dla rzeczywistych zmiennych losowych $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją zmienne losowe $\tilde{X}_n \sim X_n$ i $\tilde{X} \sim X$ takie, że X_n jest zbieżny do X według prawdopodobieństwa.
10. Udowodnij, że jeśli dla wszystkich n , X_n jest niezależne od Y_n , X niezależne od Y oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$ to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.
- 11* Wykaż, że

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon : \forall t \ F_\mu(t - \varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t + \varepsilon) + \varepsilon\}$$

definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilstycznych na R zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu \Leftrightarrow d(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$).

- 12** Zmienne losowe X_n są niezależne. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.
- 13* Załóżmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k , $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}X_n^k = \frac{1}{k+1}$. Czy z tego wynika, że X_n jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 14

- 1* Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz dystrybuanta F_X jest ciągła, to F_{X_n} zbiega jednostajnie do F_X .
- 2* Niech X_n będzie pierwszą współrzędną rozkładu jednostajnego na kuli jednostkowej w R^n . Udowodnij, że $\sqrt{n}X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
3. Wykaż, że rodzina zmiennych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha| < \infty, \sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.
- 4** Udowodnij, że twierdzenie Prochorowa zachodzi na przestrzeni polskiej tzn. metrycznej, zupełnej, ośrodkowej.
5. Oblicz funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów tzn.
 - a) geometrycznego z parametrem p ,
 - b) Poissona z parametrem λ ,
 - c) dwumianowego z parametrami n, p ,
 - d) jednostajnego na przedziale $[a, b]$,
 - e) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$,
 - f) wykładniczego z parametrem λ ,
 - g) Cauchy'ego z parametrem h .
6. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?
- 7* Udowodnij, że jeśli $\varphi_X''(0)$ istnieje to $\mathbf{E}X^2 < \infty$
8. Wykaż, że dla zmiennych X przyjmujących tylko wartości całkowite zachodzi
$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt.$$
- 9* Udowodnij, że jeśli X ma rozkład ciągły z gęstością g to $\varphi_X(t) \rightarrow 0$ dla $|t| \rightarrow \infty$.
10. Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcje
 - a) φ^2 ,
 - b) $\operatorname{Re}(\varphi)$,
 - c) $|\varphi|^2$,
 - d) $|\varphi|$muszą być funkcjami charakterystycznymi?
11. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich t .
12. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 15

1. Udowodnij, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ to zmienna $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.
2. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.
- 3* Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla $k = 1, 2, \dots$ i Y ma rozkład normalny, to X i Y mają ten sam rozkład.
- 4** Znajdź przykład zmiennych X i Y o różnych rozkładach takich, że $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla $k = 1, 2, \dots$
5. Podaj przykład zmiennych losowych X_n takich, że $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi$ punktowo, ale φ nie jest funkcją charakterystyczną żadnego rozkładu na prostej.
- 6*
 - a) Udowodnij, że $\varphi(x) = (1 - |x|)I_{(-1,1)}(x)$ jest funkcją charakterystyczną
 - b) Udowodnij, że jeśli $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest parzystą, wypukłą i malejącą na $[0, \infty)$, kawałkami liniową oraz $\varphi(0) = 1$ to φ jest funkcją charakterystyczną.
 - c) Udowodnij, że jeśli $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest parzystą, wypukłą i malejącą na $[0, \infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$, to φ jest funkcją charakterystyczną.
7. Wykaż, że funkcja $e^{-|t|^\alpha}$
 - a*) jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leq 1$,
 - b*) nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$,
 - c**) jest funkcją charakterystyczną dla $1 < \alpha \leq 2$.
8. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a Y jest niezależną kopią X ?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 16

1. Wykaż, że warunek Lyapunowa

$$\exists_{\delta > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq k_n} \mathbf{E}|X_{n,k} - EX_{n,k}|^{2+\delta} = 0$$

implikuje warunek Lindeberga (zakładamy, że $s_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$).

2. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ . Wykaż, że

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ według rozkładu gdy } \lambda \rightarrow \infty.$$

- 3* Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k \leq n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

4. Rzucamy 1000 razy kostką. Oszacuj prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie między 3400 a 3600.
5. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = a) = \mathbf{P}(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.
6. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne przy czym $\mathbf{P}(X_k = k) = \mathbf{P}(X_k = -k) = 1/2$ Niech $s_n = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)$ Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{s_n}.$$

7. Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że

$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Udowodnij, że $\text{Var}(X_n) \rightarrow 2$ oraz

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ według rozkładu.}$$

- 8* Dana jest zmienna losowa X taka, że $\mathbf{E}X^2 < \infty$ oraz $X \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z)$, gdzie Y, Z są niezależnymi kopiami X . Wykaż, że $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dla pewnego $\sigma \geq 0$.

- 9** Wykaż, że teza poprzedniego zadania jest prawdziwa bez założenia $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

- 10* Czy z równości dwu funkcji charakterystycznych na pewnym otoczeniu zera wynika równość rozkładów?

- 11** Wykaż, że jeśli zmienne X i Y są niezależne oraz $X + Y$ ma rozkład normalny to obie zmienne X i Y są normalne.

- 12* Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że $aX + bY \sim (|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{1/\alpha} X$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ (Y oznacza niezależną kopię X).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 17

1. Podaj przykład zależnych zmiennych losowych X, Y o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$ takich, że $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
2. Udowodnij, że zmienna $X \sim \mathcal{N}(a, B)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy gdy B jest odwracalne oraz, że w tym ostatnim przypadku wynosi ona

$$g_X(x) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\langle C(x-a), x-a \rangle}{2}\right), \text{ gdzie } C = B^{-1}.$$

- 3* Załóżmy, że zmienne $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n})$ mają rozkład jednostajny na kuli $B(0, \sqrt{n})$ o środku w 0 i promieniu \sqrt{n} . Wykaż, że dla każdego k , zmienne $(X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k})$ zbiegają według rozkładu do $\mathcal{N}(0, Id_k)$.
4. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = 1$ oraz

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq [nt]} X_i \text{ dla } t \geq 0, n = 1, 2, \dots$$

Udowodnij, że dla dowolnych $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ciąg wektorów losowych $(S_n(t_1), S_n(t_2), \dots, S_n(t_k))$ jest zbieżny według rozkładu. Jak wygląda rozkład graniczny?

- 5** Dla $n = 1, 2, \dots$ i $t \in [0, 1]$ określmy zmienną $T_n(t)$ wzorem

$$T_n(t) := (nt - [nt])S_n\left(\frac{[nt] + 1}{n}\right) + ([nt] + 1 - nt)S_n\left(\frac{[nt]}{n}\right),$$

gdzie S_n są takie jak w poprzednim zadaniu. Wówczas T_n można traktować jako zmienną o wartościach w $C[0, 1]$. Wykaż, że T_n są zbieżne według rozkładu. Co można powiedzieć o rozkładzie granicznym?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 18

1. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $\tau - 1$, $\tau + 1$ też są momentami zatrzymania (przyjąć $T = \mathbb{N}$)?
2. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B
 - a) $\tau_1 = \inf\{n : X_n \in B\}$ - pierwsza wizyta w zbiorze B
 - b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \dots$ - k -ta wizyta w zbiorze B .
3. Wykaż, że jeśli τ, σ są momentami zatrzymania ($T = \mathbb{N}$) to
 - a) jeśli $\tau \equiv t$ to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$
 - b) jeśli $\tau < \sigma$ to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$
 - c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t .
4. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Udowodnij, że $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leq \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.
- 5* Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(X_i = \pm 1) = 1/2$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.
6. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz $\mathbf{E}|X_i| < \infty$ dla wszystkich i . Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{E}X_i = 1$ dla wszystkich i lub $X_1 = 0$ p.n.
7. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, gdzie X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$. Znajdź liczby a_n, b_n dla których $S_n^2 + a_n S_n + b_n$ jest martyngałem względem \mathcal{F}_n .
8. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne o wspólnym rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Dla $\lambda > 0$ znajdź liczby a_n takie, że $(e^{\lambda S_n - a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.
- 9* Niech $(M_k)_{k=1}^n$ będzie martyngałem względem pewnej filtracji takim, że $\mathbf{E}M_k^2 < \infty$ dla wszystkich k . Wykaż, że $\mathbf{E}M_1^2 \leq \mathbf{E}M_n^2$ oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $M_1 = M_2 = \dots = M_n$ p.n.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 19

1. Niech (X_n, \mathcal{F}_n) będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ , $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.
2. Niech (X_n, \mathcal{F}_n) będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że $X_n = Y_n + Z_n$, gdzie Y_n jest martyngałem, a Z_n ciągiem prognozowalnym. Wykaż, że X_n jest nadmartyngałem wtedy i tylko wtedy gdy Z_n jest niemalejący.
3. Egzaminator przygotował na egzamin 20 zestawów pytań. Każdy z 15 zdających studentów losuje 1 zestaw, który później nie jest już używany. Student S zna odpowiedź na dokładnie 10 z 20 zestawów. Od wychodzących z egzaminu dowiaduje się jakie pytania są już wylosowane. Jaka jest optymalna strategia (wybór momentu wejścia na egzamin) maksymalizująca szanse zdania egzaminu przez S?
4. X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$. Udowodnij, że $\mathbf{E}(S_\tau - \tau \mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau \text{Var}(X_1)$.
- 5* X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś t liczbą rzeczywistą taką, że $\varphi_{X_n}(t) \neq 0$ dla $n = 1, 2, \dots$. Udowodnij, że

$$\frac{e^{itS_n}}{\prod_{j \leq n} \varphi_{X_j}(t)}, \text{ gdzie } S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n) . Wywnioskuj stąd, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zbiega według rozkładu wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny p.n.p.

6. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1)$. Przyjmując $S_0 = 0$ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ znajdź wszystkie liczby rzeczywiste λ dla których λ^{S_n} jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n) .
7. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą niesymetryczną.
- 8* Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę
 - a) monetą symetryczną
 - b) monetą niesymetryczną.
- 9* Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygraną 1 zł. przez A w grze orła i reszkę
 - a) monetą symetryczną
 - b) monetą niesymetryczną.
- 10* Podaj przykład martyngału X_n takiego, że $X_n \rightarrow 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}|X_n| \rightarrow \infty$.
- 11* Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=-\infty}^0$ będzie martyngałem (z tzw. czasem odwróconym). Udowodnij, że granica $X = \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n$ istnieje. Co można powiedzieć o X ?
- 12* Wykaż, że jeśli M_n jest martyngałem takim, że dla pewnej ściśle wypukłej funkcji ϕ , $\mathbf{E}\phi(M_k) = \mathbf{E}\phi(M_1)$, to $M_k = M_1$ p.n.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 20

1. Podaj przykład martyngału takiego, że $\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$, który nie jest zbieżny w L^1 .

2* Udowodnij, że dla podmartyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$

$$\forall t > 0 \quad \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > t\right) \leq 3 \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}|X_k|}{t}$$

oraz w przypadku $X_n \geq 0$ lub $X_n \leq 0$ dla wszystkich n , stałą 3 można zamienić na 1.

3. Wyprowadź z poprzedniego zadania nierówność Kołmogorowa

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{i=1}^k X_i\right| > t\right) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2$$

dla niezależnych zmiennych losowych X_i takich, że $\mathbf{E}X_i = 0$.

4* Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ zachodzi

$$\mathbf{E} \sup_n |X_n| \leq C(1 + \sup_n \mathbf{E}|X_n| \ln^+ |X_n|).$$

5. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe X_n są zbieżne w L^p , $p \geq 1$ to $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowny (zatem $X_n \rightarrow X$ w L^p wtedy i tylko wtedy gdy $X_n \rightarrow X$ według prawdopodobieństwa oraz $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowny).

6. Wykaż, że jeśli X_t i Y_t są jednostajnie całkowne to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $aX_t + bY_t$ jest jednostajnie całkowny.

7. Znajdź jednostajnie całkowny ciąg X_n taki, że $\mathbf{E} \sup_n |X_n| = \infty$.

8. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_t \mathbf{E}\varphi(|X_t|) < \infty$ to (X_t) jest jednostajnie całkowny.

9* Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots o jednakowym rozkładzie taki, że $\mathbf{E}|X_i| < \infty$, niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$.

a) Udowodnij, że $(\frac{S_n}{n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem z czasem odwróconym.

b) Wywnioskuj stąd silne prawo wielkich liczb Kołmogorowa $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mathbf{E}X_i$ p.n. i w L^1 .

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 21

- 1* Dany jest zbiór przeliczalny E i funkcje borelowskie $\varphi_n : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$, $n = 1, 2, \dots$ (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne). Zmienne losowe X_0 o wartościach w E i U_1, U_2, \dots o wartościach rzeczywistych są niezależne. Udowodnij, że ciąg $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $X_{n+1} = \varphi_n(X_n, U_n)$ jest łańcuchem Markowa.
2. Dwa łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia P są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.
3. Zmienne $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Czy ciągi $X_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $Y_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ są łańcuchami Markowa?
4. (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w E . Czy dla dowolnej funkcji $f : E \rightarrow E$, $(f(X_n))$ musi być łańcuchem Markowa?
5. Zmienne X_0, X_1, \dots są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1) = p \in (0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $M_n = \max(S_1, S_2, \dots, S_n)$. Które z ciągów $|S_n|, M_n, M_n - S_n$ są łańcuchami Markowa? Znajdź odpowiednie macierze przejścia.
6. Udowodnij, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma właściwych podzbiorów zamkniętych.
- 7* Prawdopodobieństwo, że bakteria ma n potomków wynosi p_n dla $n = 0, 1, \dots$. Zakładając, że bakterie w n -tym pokoleniu rozmnażają się równocześnie i niezależnie udowodnij, że populacja bakterii (licząca w chwili 0, $N > 0$ bakterii) nigdy nie wyginie z prawdopodobieństwem dodatnim wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k > 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 22

1. Wykaż, że skończony łańcuch Markowa ma przynajmniej jeden stan powracający.
- 2* Rozpatrzmy błądzenie w \mathbb{Z}^k z macierzą przejścia $p_{x,y} = \frac{1}{2k}$ gdy $\sum_{i=1}^k |x_i - y_i| = 1$ oraz $p_{x,y} = 0$ dla pozostałych x, y . Dla jakich k jest to błądzenie powracalne?
3. Wykaż, że jeśli y jest stanem chwilowym to $\sum_{n=0}^{\infty} p_{x,y}(n) < \infty$ dla wszystkich x , w szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{x,y}(n) = 0$.
- 4* Udowodnij, że łańcuch Markowa jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy $F_{x,y} = 1$ dla wszystkich x, y .
- 5* Dane są dwa niezależne błądzenia symetryczne X_n, Y_n na prostej (lub ogólniej w \mathbb{Z}^k). Czy $\mathbf{P}(\exists n \geq 1 X_n = Y_n) = 1$ tzn. czy z prawdopodobieństwem 1 błądzenia się kiedyś przetną?
- 6* Niech (X_n) będzie nieprzywiedlnym okresowym łańcuchem Markowa na E z macierzą przejścia P i okresem $d > 1$. Udowodnij, że istnieje rozkład $E = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_d$ taki, że zbiory S_i spełniają warunki:
 - a) $p_{xy} > 0 \Rightarrow x \in S_i, y \in S_{i+1}$ dla pewnego $i = 1, 2, \dots, d$ (przyjmujemy $S_{d+1} = S_1$).
 - b) na każdym S_i macierz $(p_{xy}(d))_{x,y \in S_i}$ definiuje nieprzywiedlny, nieokresowy łańcuch Markowa.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 23

- 1* Wykaż, że w powracalnym i nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwem 1 każdy stan jest odwiedzany nieskończenie wiele razy.
2. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.
3. Ciąg niezależnych zmiennych losowych Y_1, Y_2, \dots ma wspólny rozkład taki, że $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = -1) = p$. Definiujemy rekurencyjnie ciąg X_n wzorami $X_0 = 1, X_{n+1} = \max(X_n, 1) + Y_n$. Wykaż, że ciąg ten jest łańcuchem Markowa. Znajdź rozkład stacjonarny o ile istnieje.
4. W powiecie N. syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem $3/4$, a syn niepiekarza z prawdopodobieństwem $1/100$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? A potomek w n -tym pokoleniu? Jaki procent ludzi w N. jest piekarzem?
- 5* Udowodnij twierdzenie o istnieniu rozkładu stacjonarnego dla łańcuchów z przeliczalną przestrzenią stanów bez używania twierdzenia Brouera.
- 6* Stan x łańcucha Markowa x nazywamy niezerowym, jeśli średni czas powrotu do x jest skończony, zaś zerowym w przeciwnym przypadku. Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracalnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są niezerowe lub wszystkie są zerowe.
- 7* Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracającym łańcuchu Markowa stan y jest zerowy wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{xy}(n) = 0$ dla wszystkich stanów x .

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 24

- 1* Niech X_0, X_1, \dots będzie nieprzywiedlnym nieokresowym łańcuchem Markowa mającym rozkład stacjonarny π . Załóżmy, że $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona. Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f(X_i)}{n+1} = \mathbf{E}_\pi f(X_0) = \sum_{x \in E} \pi_x f(x) \quad \text{p.n.}$$

- 2* Udowodnij, że dla łańcuchów Markowa ze skończoną przestrzenią stanów E i dowolnego niepustego podzbioru $F \subset E$ układy równań

$$\begin{cases} p_F(x) = 1 & \text{dla } x \in F \\ p_F(x) = \sum_{y \in E} p_{xy} p_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ p_F(x) = 0 & \text{jeśli } \forall_n \forall_{y \in F} p_{xy}(n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_F(x) = 0 & \text{dla } x \in F \\ m_F(x) = 1 + \sum_{y \in E} p_{xy} m_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ m_F(x) = \infty & \text{jeśli } p_F(x) < 1 \end{cases}$$

mają dokładnie jedno rozwiązanie

3. Po wierzchołkach sześciangu porusza się w sposób losowy mucha - w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1/3$ przenosi się do jednego z sąsiednich wierzchołków. Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha powróci do punktu wyjścia nie odwiedzając wcześniej przeciwległego wierzchołka oraz średnią liczbę kroków jakie zajmie jej powrót do punktu wyjścia.

W zadaniach 4–8 $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$ jest procesem Wienera

4. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
- $X_t = -W_t$ (odbicie)
 - $Y_t = c^{-1/2} X_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
 - $Z_t = tX_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
 - $U_t = X_{T+t} - X_T, T \geq 0$
 - $V_t = X_t$ dla $t \leq T, V_t = 2X_T - X_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geq 0$.
5. Udowodnij, że W_t i $W_t^2 - t$ są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t), t \geq 0$.
6. Udowodnij, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.p.
- 7* Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n . Udowodnij, że

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \rightarrow b - a, n \rightarrow \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

jeśli $\|\pi_n\| \rightarrow 0$ oraz $S_n \rightarrow b - a$ p.n.p., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

- 8* Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.