Zadania z RP 2. seria 1.

1. Dla $x \in \mathbb{R}^n$, niech δ_x oznacza miarę Diraca, skupioną w punkcie x. Wykazać, że dla dowolnego ciągu $x_n \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x_n \to x.$$

2. Podać przykład rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ, takich, że $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale $\mu_n(A) \nrightarrow \mu(A)$ dla pewnego zbioru A.

3. Niech S będzie przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, zaś μ_n, μ - miarami probabilistycznymi skupionymi na S. Wykazać, że
   a) jeśli dla każdego $x \in S$, $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$,
   b) jeśli S ma tylko punkty izolowane, to implikację z punktu a) można odwrócić,
   c) punkt b) jest nieprawdziwy, jeśli opuścimy założenie, że każdy punkt zbioru S jest izolowany.

4. Niech $\mathrm{B}(p, n)$ oznacza rozkład Bernoulliego o n próbach z prawdopodobieństwem sukcesu p, a $\mathrm{Poiss}(\lambda)$ - rozkład Poissona z parametrem λ. Wykazać, że jeśli $p_n n \to \lambda$, to $\mathrm{B}(p_n, n) \Rightarrow \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

5. Niech f_n, f oznaczają odpowiednio gęstości rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ na $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że jeśli $f_n \to f$ p.w., to $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale niekoniecznie na odwrót.

6. Wykazać, że zmienne losowe mające gęstości mogą zbiegać do stałej.

7. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

8. Niech zmienne losowe X_n, X będą określone na jednej przestrzeni probabilistycznej. Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ (zbieżność wg prawdopodobieństwa), to $X_n \Rightarrow X$, ale implikacja odwrotna nie musi być prawdziwa.

9. Wykazać, że jeśli $X_n \Rightarrow c$, dla pewnej stałej c, to $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} c$.

10. Podać przykład ciągu dystrybuant F_n, zbieżnego punktowo do funkcji, która nie jest dystrybuantą.

11. Podać przykład ciągu zmiennych losowych X_n, zbieżnego wg rozkładu, takiego, że odpowiadający mu ciąg dystrybuant nie zbiega punktowo do dystrybuanty rozkładu granicznego.

12. Udowodnić twierdzenie Diniego: jeśli ciąg dystrybuant F_n zbiega punktowo do dystrybuanty ciągłej F, to zbieżność jest jednostajna. Czy założenie ciągłości F jest istotne?

13. Wykazać, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n oraz X jest niezależne od Y, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

Zadania z RP 2. seria 2.

1. Obliczyć funkcje charakterystyczne rozkładów
   (a) dyskretnych - dwupunktowego, geometrycznego, Bernoulliego, Poissona;
   (b) ciągłych - normalnego, jednostajnego, wykładniczego, dwustronnego wykładniczego, Cauchy'ego.
2. Przy pomocy funkcji charakterystycznych sprawdzić, że zmienna losowa $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.
3. Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbf{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,
$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi_X(t) dt.$$
4. Pokazać, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.
5. Wiadomo, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcjami charakterystycznymi są : φ^2, Reφ, $|\varphi|^2$, $|\varphi|$?
6. Udowodnić, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbf{E}X^2 < \infty$.
7. **Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a** Wykazać, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym, to $\varphi_X(t) \to 0$, gdy $|t| \to \infty$.
8. Udowodnić, że $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$.

Zadania z RP 2. Seria 3.

1. Dana jest rodzina rozkładów

   a) wykładniczych $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$,

   b) jednostajnych $\{U(a,b) : a, b \in A,\ a < b\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

   Jaki warunek musi spełniać zbiór A, aby ta rodzina była ciasna?

2. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X i $X+Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnić, że zmienna Y ma także rozkład normalny lub jest stała p.n.

3. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a rozkład ε zadany jest następująco: $P(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że zmienna $X - Y$ ma ten sam rozkład, co zmienna εX.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny $U(0,1)$, natomiast Y ma rozkład zadany następująco:

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

   Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_n$ zmiennych losowych zbieżny według rozkładu do X oraz dwa ciągi liczbowe (a_n), (b_n). Wykazać, że jeśli $a_n \to a$ oraz $b_n \to b$, to zmienne $a_n X_n + b_n$ zbiegają słabo do $aX + b$.

6. Zmienne losowe $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym zmienna $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennych X_i.

7. Dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0,1)$. Wykazać, że jeśli $(a_n)_n$ jest takim ciągiem liczb dodatnich, że $a_n \to 0$, $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to zmienne $a_n X_n$ zbiegają słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

8. Niech X będzie zmienną o rozkładzie jednostajnym $U(-1,1)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje zmienna Y, niezależna od X, taka, że rozkłady zmiennych $X + Y$ i $2Y$ są takie same.

9. Zmienne $X_1,\ X_2,\ \ldots$ są niezależne i mają rozkład Cauchy'ego. Wykazać, że zmienne $Y_n = \frac{1}{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ zbiega według rozkładu do $\frac{1}{Y}$, gdzie Y jest zmienną o rozkładzie $\mathrm{Exp}(\frac{1}{\pi})$.

Zadania z RP 2. seria 4.

1. Udowodnij, że układ trójkątny $X_{n,k} = \frac{X_k}{\sqrt{n}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, gdzie X_n, $n = 1, 2, \ldots$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, spełnia warunek Lindeberga.

2. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$, o wspólnym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 0 i dodatnią wariancją. Wyznaczyć w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^\alpha}\right| > a\right).$$

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$. Zbadać zbieżność względem rozkładu ciągów

$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

4. Powiemy, że układ trójkątny $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lyapunowa,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}|^{2+\delta} = 0.$$

Wykazać, że warunek Lyapunowa implikuje warunek Lindeberga.

5. Rzucono 1000 razy kostką. Oszacować prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że

$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Wykazać, że

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

ale $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$.

7. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową, taką, że $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$, gdzie Y, Z - niezależne kopie X. Wykazać, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

8. $(*)$ Niech $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Wykazać, że dla dowolnej funkcji gładkiej o zwartym nośniku $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zachodzi

$$\mathrm{Var} f(X) \leqslant \mathbf{E}|f'(X)|^2.$$

Zadania z RP 2 - seria 5

1. Niech $X, X_1, X_2, ..., X_n$ bedą niezależnymi wektorami losowymi o tym samym rozkładzie, przy czym $\mathbf{E}X = 0$ i współrzędne wektora X mają skończone wariancje. Znaleźć rozkład graniczny dla ciągu wektorów losowych
$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}}.$$

2. Wykazać, że jeśli X i Y są niezależnymi zmienymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$, to
$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y), \text{ i } V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$
są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ. Znajdź rozkład zmiennej
$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{N} X_k}{\sqrt{N}},$$
gdzie X_k *i.i.d.* z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

4. Udowodnij, że macierz $a_{i,j} = \frac{\cos(i-j)}{1+(i-j)^2}$ $1 \leqslant i,j \leqslant n$ jest dodatnio określona.

   Uwaga. Jeśli macierze $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ są dodatnio określone, to $(a_{i,j}b_{i,j})$ również.

5. Wykazać, że dla rzeczywistej funkcji charakterystycznej zachodzi nierówność
$$1 + \phi(2t) \geqslant 2(\phi(t))^2.$$

6. Niech X_k będą zmiennymi losowymi niezleżnymi z rozkładu:
   (a) geometrycznego;
   (b) wkładniczego z parametrem λ;
   (c) $(*)$ normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej losowej

$$Z_a := \inf\{k \geqslant 1 : \sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant a\},$$

gdzie $a > 0$ jest pewną liczbą rzeczywistą.

7. Zmienne losowe X_i są niezależne i mają ten sam rozkład: $P(X_i = a) = P(X_i = 1/a)$, przy czym $a > 1$. Zbadać zbieżność według rozkładu zmiennych losowych $Z_n = (X_1 ... X_n)^{1/\sqrt{n}}$.

8. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną wektora losowego $AX + b$ zakładając, że znamy funkcję charakterystyczną wektora X.

9. Udowodnić, że jeśli zmienne X_k $k = 1, 2, ...$, są niezależne z tego samego rozkładu, $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}X_k^2 = \sigma^2$, f jest różniczkowalna w zerze, to

$$\sqrt{n}(f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma f'(0)),$$

gdzie $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$.

10. Niech X_k będą niezależnymi zmiennymi losowymi gaussowskim o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że zmienne $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ i $D_n = \frac{1}{n}((X_1 - S_n)^2 + ... + (X_n - S_n)^2)$ są niezależne.

Uwaga. Jest to statystyczna charakteryzacja rozkładu normalnego.

Zadania z RP 2 - seria 6

1. Niech $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |\cdot|)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Zmienna losowa X dana jest wzorem $X(\omega) = \omega$. Wyznaczyć $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady

   a) Poissona z parametrami λ, μ, odpowiednio,

   b) Bernoulliego $B(n,p)$, $B(m,p)$, odpowiednio.

   Wyznaczyć $\mathbf{E}(X|X+Y)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U([0,n])$. Wyznaczyć $\mathbf{E}(X|[X])$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

4. Podać przykład niezależnych zmiennych losowych X, Y i σ-ciała $\mathcal{F}$ takich, że
$$\mathbf{E}(XY|\mathcal{F}) \neq \mathbf{E}(X|\mathcal{F})\mathbf{E}(Y|\mathcal{F}).$$

5. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, a $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Udowodnić, że
$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{F})Y) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}(Y|\mathcal{F})).$$

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny $U(0,1)$. Wyznaczyć

   a) $\mathbf{E}(X-Y|X+Y)$,

   b) $\mathbf{E}(X+Y|X-Y)$.

7. Zmienne losowe X, Y są niezależne i $\mathbf{E}(X|X+Y) = X$. Czy wynika stąd, że Y jest stała p.n.?

8. Udowodnić, że zmienna losowa X ma rozkład symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{E}(X|X^2) = 0$.

9. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Wyznaczyć $\mathbf{E}(X_1|X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

10. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$. Wyznaczyć

a) $\mathbf{E}(X|aX+bY)$, gdzie $a,\ b$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $(a,b)\neq(0,0)$,

b) $\mathbf{E}(XY|X+Y)$.

Zadania z RP 2 - seria 7.

1. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś f mierzalną funkcją dwu zmiennych, taką że $\mathbf{E}|f(X,Y)| < \infty$. Udowodnić, że $\mathbf{E}(f(X,Y)|X) = \mathbf{E}_Y f(X,Y)$ p.n.

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie, $\mathbf{E}|X_1| < \infty$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$. Wyznaczyć $\mathbf{E}(X_i|\mathcal{F}_n)$ dla $i, n \geqslant 1$.

3. Podać przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}X$.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0. Zdefiniujmy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ oraz $Z_n = S_n^2 - \mathrm{Var} S_n$. Wykazać, że $(Z_n, \sigma(X_1, \ldots, X_n))$ jest martyngałem.

5. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Zdefiniujmy

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k$$

Udowodnić, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

6. Niech ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = -1) = q = 1 - p$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oraz

$$Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$$

Wykazać, że ciąg $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

7. Niech τ_1, τ_2 będą momentami stopu. Udowodnić, że momentami stopu są także $\tau_1 \wedge \tau_2$ oraz $\tau_1 \vee \tau_2$.

8. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ będzie filtracją, zaś $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ciągiem zmiennych losowych, adaptowalnym do tej filtracji. Niech τ oznacza moment pierwszej wizyty ciągu X_t w zbiorze borelowskim B. Wykazać, że τ jest momentem zatrzymania.

9. Niech (X_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{U}[0,1]$. Zdefiniujmy $\tau = \inf\{n\colon X_1 + \ldots + X_n \geqslant 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}\tau$.

10. Podać przykład momentu zatrzymania τ, takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

11. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, gdzie $\varepsilon_i, \varepsilon_2 \ldots$ - niezależne zmienne Rademachera. Niech $\tau = \inf\{n\colon S_n = 1\}$. Wykazać, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

12. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.

Zadania z RP 2. seria 8.

1. Schemat Poyla: W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy kulę i zwracamy ją z powrotem, dokłądjąc jeszcze a kul tego samego koloru co kula wylosowana. Następnie powtarzamy to doświadczenie z tą nową konfiguracją kul, itd. Niech $X_0 = b$, $X_n =$ liczba wyloswanych kul białych w urnie po n losowaniach, $n = 1, 2, ...$ Pokazać, że frakcje kul białych, tzn. $(\frac{X_n}{b+c+na})_{n=0}^{\infty}$ tworzą martyngał względem naturalnej filtracji.

2. Student X, jeden z 15-tu zdających egzamin, zna odpowiedź na 10 pytań z 30, które są wylosowywane przez kolejno zdających studentów i które nie są powtórnie używane. Od studentów, którzy już zdali student X dwowiaduje się które pytania zostały już wyloswoane. Jaka jest optymalna strategia (w którym momoencie wejsć na egzamin) by szanse na zdanie były największe?

3. Dwaj gracze rzucają monetą (być może niesymetryczną). Kapitał początkowy gracza A wynosi a złotych, gracza B b złotych. Gra się kończy, gdy jeden z graczy jest zrujnowany. Policz prawdopodobieństwo ruiny dla każdego z graczy.

4. Udowodnić wersję tożsamości Walda: jeśli $X_1, ..., X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$, $\mathbf{E}\tau < \infty$,

$$\mathbf{E}(S_\tau - \tau\mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau \mathrm{Var} X_1.$$

5. Policz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w symetrycznym zgadnieniu ruiny.

6. Rozważmy ruinę gracza z barierą odbijającą w zerze i pochłaniającą w N. Gracz startuje z kapitału k. Policz średni czas trwania tej gry.

7. Niech τ i σ będą momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Udowodnij, że jeśli $\tau \leqslant \sigma$ to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

8. Zauważ, że jeśli $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest nadmartyngałem (martyngałem) prawostronnie ciągłym to $(X_{t\wedge\tau}, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ również.

9. Pokaż, że jeśli X_k jest martyngałem, to $|X_k|$ jest podmartyngałem. Zauważ, że jeśli X_k jest podmartyngałem, to $|X_k|$ nie musi nim być.

10. Ciąg (X_n) jest martyngałem. Zbadać, czy są pod- nadmartyngałami ciągi: a) $(|X_n|^p)_n$ $p \geqslant 1$; b) $(X_n \wedge a)_n$; c)$(X_n \vee a)_n$; $(X_n^3)_n$.

11. Niech X_k będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym. Definiujemy zmienne $N_m := \inf\{k \geqslant 0 : \ X_1 + ...X_k \leqslant m\}$. Pokaż, że $N_m - m$ jest martyngałem o średniej 0.

12. Niech $(U_n)_n$ będzie ciągiem Bernouliego. Niech $\mathcal{F}(U_1, ..., U_n)$ i niech

$$Z_n = e^{a(U_1+...+U_n)-(na^2/2)}.$$

Udowodnić, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem. Zbadać zbieżność ciągu (Z_n) prawie na pewno i w L_1.

13. Pokazać na przykładzie, że ze zbieżności martyngału według prawdopodobieństwa nie wynika zbieżność prawie na pewno.

14. Niech $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$. Definujemy

$$f_n(x) = 2^n \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(y)dy, \ \forall \frac{k}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{2^n}, \ k = 0, 1, ..., 2^n - 1,$$

dla $n = 1, 2, ...$ Udowodnić, że $f_n(x) \to f(x)$ prawie wszędzie i w L_1.

15. Niech $\xi_1, \xi_2, ...$ będą i.i.d $\geqslant 0$ o rozkładzie niejednopunktowym takie, że $\mathbf{E}\xi_1 = 1$ oraz

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\xi_n} = 0.$$

Wówczas zmienne $X_n = \xi_1 ... \xi_n$ tworzą martyngał zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w L_1 .

Zadania z RP 2 - seria 9

1. Macierz przejścia łańcucha Markowa $(X_n)_n$ na przestrzeni $E = \{1, 2, 3, 4\}$ dana jest następująco:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.
   b) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.
   c) Wyznaczyć rozkład stacjonarny.
   d) Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

2. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

3. Naukowiec mający r parasoli wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo p), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $q = 1 - p$). Niech stanem łańcucha Markowa będzie liczba parasoli znajdujących się pod ręką, bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy. Skonstruować macierz przejścia i znaleźć rozkład stacjonarny. Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w danym (odległym) dniu, a następnie wykazać, że 5 parasoli jest w stanie ochronić go w 5% przed zmoknięciem (dla dowolnego p).

4. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy pod rząd cztery orły. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

5. Zmienne $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$. Ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest określony następująco: $X_0 \equiv 1$ p.n., a dla $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } Y_n = 1, \\ X_n Y_n & \text{jeśli } Y_n \neq 1. \end{cases}$$

a) Wykazać, że $(X_n)_n$ jest nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa.

b) Czy łańcuch ten jest okresowy?

c) Udowodnić, że wszystkie stany są powracające.

d) Niech N będzie dużą liczbą naturalną. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że X_N nie przekracza 3.