Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 1

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb x_n, x,
$$\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x_n \to x.$$

2. Wykaż, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$.

3. Podać przykład rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ, takich, że $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale $\mu_n(A) \nrightarrow \mu(A)$ dla pewnego zbioru A.

4. Wykaż, że:
a) jeśli $X_n \to X$ p.n., to $X_n \Rightarrow X$;
b) jeśli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \Rightarrow X$;
c) jeśli $X_n \Rightarrow c$, gdzie c jest stałą, to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.

5. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
b) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?

6. Czy teza punktu a) poprzedniego zadania się zmieni, jeśli zmienne X_n przyjmują wartości wymierne?

7. Niech $\mathrm{Bin}(p,n)$ oznacza rozkład Bernoulliego o n próbach z prawdopodobieństwem sukcesu p, a $\mathrm{Poiss}(\lambda)$ - rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że jeśli $p_n n \to \lambda$, to $\mathrm{Bin}(p_n, n) \Rightarrow \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

8. Podaj przykład ciągu dystrybuant F_n, zbieżnego punktowo do funkcji, która nie jest dystrybuantą.

9. Podaj przykład ciągu zmiennych losowych X_n, zbieżnego wg rozkładu, takiego, że odpowiadający mu ciąg dystrybuant nie zbiega punktowo do dystrybuanty rozkładu granicznego.

10. Wykaż, że zmienne losowe mające gęstości mogą zbiegać do stałej.

11. Niech X będzie niezdegenerowaną zmienną losową. Wykaż, że zmienne $a_nX + b_n$ zbiegają według rozkładu do zmiennej $aX + b$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$ i $b_n \to b$.

12. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 2

1. Niech g_n, g oznaczają odpowiednio gęstości rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ na $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że jeśli $g_n \to g$ p.w., to $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale niekoniecznie na odwrót.

2. Wykaż, że rodzina rozkładów normalnych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha|, \sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

3. Dana jest rodzina rozkładów

   a) wykładniczych $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$,

   b) jednostajnych $\{U(a,b) : a, b \in A,\ a < b\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

   Jaki warunek musi spełniać zbiór A, aby ta rodzina była ciasna?

4. Wykazać, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n oraz X jest niezależne od Y, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

5. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$ to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbf{E}|X_n|^p \to \mathbf{E}|X|^p$. Jest to jednak prawdą gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 3

1. Oblicz funkcje charakterystyczne rozkładów
   i) dyskretnych - dwupunktowego, geometrycznego, Bernoulliego, Poissona;
   ii) ciągłych - normalnego, jednostajnego, wykładniczego, dwustronnego wykładniczego.

2. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

3. Przy pomocy funkcji charakterystycznych sprawdź, że jeśli ε_n są niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi przyjumjącymi wartości ± 1, to zmienna losowa $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$.

4. Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbf{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,
$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itn}\varphi_X(t)dt.$$

5. Pokaż, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.

6. Wiadomo, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcjami charakterystycznymi są : φ^2, $\mathrm{Re}\varphi$, $|\varphi|^2$, $|\varphi|$?

7. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich t.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 4

1. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X i $X+Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnij, że zmienna Y ma także rozkład normalny lub jest stała p.n.

2. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że zmienna $X - Y$ ma ten sam rozkład, co zmienna εX.

3. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

4. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.

5. Korzystając z funkcji charakterystycznej oblicz $\mathbf{E}X^k$ dla $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

6. Dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0,1)$. Wykaż, że jeśli $(a_n)_n$ jest takim ciągiem liczb dodatnich, że $a_n \to 0$, $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to zmienne $a_n X_n$ zbiegają słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

7. Niech X będzie zmienną o rozkładzie jednostajnym $U(-1,1)$. Rozstrzygnij, czy istnieje zmienna Y, niezależna od X, taka, że rozkłady zmiennych $X + Y$ i $2Y$ są takie same.

8. Udowodnij, że jeśli $\varphi_X''(0)$ istnieje to $\mathbf{E}X^2 < \infty$

9. Podaj przykład zmiennych losowych X_n takich, że $\varphi_{X_n} \to \varphi$ punktowo, ale φ nie jest funkcją charakterystyczna żadnego rozkładu na prostej.

10. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0,2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a Y jest niezależną kopią X?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 5

1. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracja po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonują losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

2. W pewnym stanie w wyborach prezydenckich głosuje 500.000 osób. Zakładając, że wyborcy głosują na każdego z dwu kandydatów z prawdopodobieństwem 50% jaka jest szansa, że różnica między kandydatami będzie mniejsza niż 100 głosów?

3. Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób popierających pewną partię polityczną. Chcemy by błąd był mniejszy niż 1% z prawdopodobieństwem 0.95? Ile w tym celu musimy przepytać osób? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli wiemy, że partię popiera nie więcej niż 10% wyborców?

4. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0,517. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt?

5. Rzucono 1000 razy kostką. Oszacuj prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

6. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots,$ o wspólnym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 0 i dodatnią wariancją. Wyznacz w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^\alpha}\right| > a\right).$$

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = a) = \mathbf{P}(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

8. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$. Zbadaj zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 6

1. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu gdy } \lambda \to \infty.$$

2. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k\leqslant n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

3. Udowodnij, że układ trójkątny $X_{n,k} = \frac{X_k}{\sqrt{n}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, gdzie X_n, $n = 1, 2, \ldots$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, spełnia warunek Lindeberga.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne przy czym $\mathbf{P}(X_k = k) = \mathbf{P}(X_k = -k) = 1/2$. Niech $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sigma_n}.$$

5. Powiemy, że układ trójkątny $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lyapunowa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}|^{2+\delta} = 0.$$

   Wykazać, że warunek Lyapunowa implikuje warunek Lindeberga.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że

$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$

   Wykazać, że

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

   ale $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$.

7. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową, taką, że $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$, gdzie Y, Z - niezależne kopie X. Wykazać, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

8. Wyznacz funkcję charakterystyczną wektora losowego $AX + b$ zakładając, że znamy funkcję charakterystyczną wektora X.

9. Podaj przykład dwu zmiennych X, Y o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ takich, że $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, ale X i Y nie są niezależne.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 7

1. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $\tau - 1$, $\tau + 1$ też są momentami zatrzymania?

2. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B:
a) $\tau_1 = \inf\{n : X_n \in B\}$ – pierwsza wizyta w zbiorze B,
b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ – k-ta wizyta w zbiorze B.

3. Niech τ i σ będą momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że
a) jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
b) jeśli $\tau < \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$,
c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t.

4. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

5. Podaj przykład momentu zatrzymania τ, takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{E}|X_i| < \infty$ dla wszystkich i. Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{E}X_i = 1$ dla wszystkich i lub $X_1 = 0$ p.n..

7. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Zdefiniujmy
$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k$$
Udowodnij, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

8. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$. Znajdź liczby a_n, b_n dla których $S_n^2 + a_n S_n + b_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$.

9. Niech $t \in \mathbb{R}$ oraz $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Przyjmijmy $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź wszystkie ciągi (a_n) takie, że $(e^{itS_n + a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 8

1. Ciąg (X_n) jest martyngałem. Zbadaj, czy są pod- bądź nadmartyngałami ciągi:
a) $(|X_n|^p)_n$ $p \geqslant 1$;
b) $(X_n \wedge a)_n$;
c) $(X_n \vee a)_n$;
d) $(X_n^3)_n$.

2. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1)$. Przyjmując $S_0 = 0$ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ znajdź wszystkie liczby rzeczywiste λ dla których λ^{S_n} jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n).

4. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą symetryczną i niesymetryczną.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmienymi losowymi takimi, że $P(X_i = \pm 1) = 1/2$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

6. Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę monetą symetryczną i niesymetryczną.

7. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie takim, że $EX_i^2 < \infty$. Udowodnij, że dla dowolnego momentu zatrzymania względem filtracji generowanej przez (X_n) takiego, że $\mathbf{E}\tau < \infty$ zachodzi $\mathbf{E}(S_\tau - \tau\mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau\mathrm{Var}(X_1)$. Czy wzór ten musi być prawdziwy bez założenia o skończoności $\mathbf{E}\tau$?

8. Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygranie 1 zł. przez A w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

9. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 9

1. Niech $(\varepsilon_n)_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych o wartościach ± 1. Wykaż, że

$$Z_n := e^{a(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n)-(na^2/2)}.$$

jest nadmartyngałem względem $\sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Zbadaj zbieżność ciągu (Z_n) prawie na pewno i w L_1.

2. Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Wykaż, że

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$

tworzą martyngał (względem filtracji generowanej przez X_n) zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w L_1 .

3. Podaj przykład martyngału X_n takiego, że $X_n \to 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}|X_n| \to \infty$.

4. Wykaż, że jeśli (X_i) i (Y_i) są jednostajnie całkowalne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $(aX_i + bY_i)$ jest jednostajnie całkowalny.

5. Znajdź jednostajnie całkowalny ciąg X_n taki, że $\mathbf{E}\sup_n |X_n| = \infty$.

6. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunek $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_i \mathbf{E}\varphi(|X_i|) < \infty$ to (X_i) jest jednostajnie całkowalny.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 10

1. Dwa jednorodne łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia P są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

2. Zmienne $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Czy ciągi $X_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $Y_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ są łańcuchami Markowa?

3. (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w E. Czy dla dowolnej funkcji $f : E \to E$, $(f(X_n))$ musi być łańcuchem Markowa?

4. Zmienne $X_0, X_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1) = p \in (0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $M_n = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Które z ciągów $|S_n|, M_n, M_n - S_n$ są łańcuchami Markowa? Znajdź odpowiednie macierze przejścia.

5. Dany jest zbiór przeliczalny E i funkcje borelowskie $\varphi_n : E \times \mathbb{R} \to E$, $n = 1, 2, \ldots$ (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne). Zmienne losowe X_0 o wartościach w E i $U_1, U_2, \ldots$ o wartościach rzeczywistych są niezależne. Udowodnij, że ciąg $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $X_{n+1} = \varphi_n(X_n, U_n)$ jest łańcuchem Markowa.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 11

1. Dla łańcuchów Markowa o przestrzeni stanów $\{1,2,3,4\}$ i poniższych macierzach przejścia znajdź wszystkie stany nieistotne i wszystkie zamknięte zbiory stanów.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Wykaż, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma właściwego zamkniętego podzbioru stanów.

3. Wykaż, że jeśli y jest stanem chwilowym to $\sum_{n=0}^{\infty} p_{x,y}(n) < \infty$ dla wszystkich x, w szczególności $\lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = 0$.

4. Wykaż, że skończony łańcuch Markowa ma przynajmniej jeden stan powracający.

5. Zbadaj powracalność symetrycznego błądzenia losowego w $\mathbb{Z}^k$.

6. Zbadaj okresowość łańcuchów o poniższych macierzach przejścia:

$$a)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Jednorodny łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $\{0,1,2\ldots\}$ ma macierz przejścia $(p_{n,m})_{n,m\geqslant 0}$ taką, że $p_{0,1} = 1$, $p_{n,n+1} = 1 - p_{n,n-1} = p$ dla $n = 1, 2\ldots$, gdzie $p \in (0,1)$. W zależności do parametru p wyznacz wszystkie rozkłady stacjonarne.

8. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.

9. W powiecie N. syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem $3/4$, a syn niepiekarza z prawdopodobieństwem $1/100$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? A potomek w n-tym pokoleniu? Jaki procent mężczyzn w N. jest piekarzem (zakładamy dla uproszczenia, że każdy mieszkaniec N. ma dokładnie jednego syna)?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 12

1. Po wierzchołkach sześcianu porusza się w sposób losowy mucha - w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1/3$ przenosi się do jednego z sąsiednich wierzchołków. Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha powróci do punktu wyjścia nie odwiedzając wcześniej przeciwległego wierzchołka oraz średnią liczbę kroków jakie zajmie jej powrót do punktu wyjścia.

2. Macierz przejścia łańcucha Markowa $(X_n)_n$ na przestrzeni $S = \{1, 2, 3, 4\}$ dana jest następująco:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. oblicz prawdopodobieństwo tego, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.
   b) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. oblicz wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.
   c) Wyznacz rozkład stacjonarny.
   d) Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

3. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy pod rząd cztery orły. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

4. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

5. Zmienne $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$. Ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest określony następująco: $X_0 \equiv 1$ p.n., a dla $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } Y_n = 1, \\ X_n Y_n & \text{jeśli } Y_n \neq 1. \end{cases}$$

   a) Wykaż, że $(X_n)_n$ jest nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa.
   b) Czy ten łańcuch jest okresowy?
   c) Udowodnij, że wszystkie stany są powracające.