Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 1
(zadania gwiazdkowe do oddania 15 października)

1. Udowodnij, że dla dowolnych punktów x_n, x w przestrzeni metrycznej E, $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \to x$.

2. Wykaż, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $[0,1]$.

3. Wykaż, że:
a) jeśli $X_n \to X$ p.n., to $X_n \Rightarrow X$;
b) jeśli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \Rightarrow X$;
c) jeśli $X_n \Rightarrow c$, gdzie c jest stałą, to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.

4* Wykaż, że dla rzeczywistych zmiennych losowych $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zmienne losowe $\tilde{X}_n$ o tym samym rozkładzie co X_n i $\tilde{X}$ o tym samym rozkładzie co X takie, że $\tilde{X}_n$ jest zbieżny do $\tilde{X}$ według prawdopodobieństwa.

5. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
b) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?

6. Wykaż, że jeśli $np_n \to \lambda$, to $\mathrm{Bin}(n, p_n) \Rightarrow \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

7. Niech X będzie rzeczywistą zmienną losową. Wykaż, że istnieje ciąg zmiennych X_n zbieżny według rozkładu do X taki, że
a) każde X_n przyjmuje tylko skończenie wiele wartości,
b) zmienne X_n mają gęstość.

8. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$ oraz $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

9. Niech g_{X_n}, g_X będą gęstościami odpowiednich rzeczywistych zmiennych losowych. Wykaż, że jeśli $g_{X_n}(t) \to g_X(t)$ dla p.w. t, to $X_n \Rightarrow X$.

10. Co trzeba założyć o funkcji f, by z tego, że X_n jest zbieżne według rozkładu do X wynikała zbieżność według rozkładu $f(X_n)$ do $f(X)$?

11. Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz dystrybuanta F_X jest ciągła, to F_{X_n} zbiega jednostajnie do F_X.

12* Załóżmy, że X jest niezdegenerowaną zmienną losową. Wykaż, że zmienne $a_n X + b_n$, $a_n \geqslant 0$ zbiegają według rozkładu do zmiennej $aX + b$, $a \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$ i $b_n \to b$.

13* Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$, to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbf{E}|X_n|^p \to \mathbf{E}|X|^p$. Pokaż, że jest to jednak prawdą, gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

14* Niech $x \in (0,1)$ będzie liczbą niewymierną. Wykaż,że

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\{kx \bmod 1\}} \Rightarrow \lambda,$$

gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $[0,1]$. Co się dzieje, gdy x jest wymierne?

15*. Niech X_n będzie pierwszą współrzędną rozkładu jednostajnego na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że $\sqrt{n}X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

16. Załóżmy, że $X_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow Y$. Wykaż, że jeśli Y jest stałe p.n., to $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$. Czy implikacja jest prawdziwa, jeśli Y nie jest zdegenerowaną zmienną losową?

17. Udowodnij, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n, X niezależne od Y oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

18. Wykaż, że rodzina rozkładów normalnych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha|, \sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

19. Dana jest rodzina rozkładów

    a) wykładniczych $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$,
    b) jednostajnych $\{U(a,b) : a, b \in A,\ a < b\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

    Jaki warunek musi spełniać zbiór A, aby ta rodzina była ciasna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 2
(zadania gwiazdkowe do oddania 22 października)

1. Załóżmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n^k = \frac{1}{k+1}$. Wykaż, że
i) jeśli $\mathbf{P}(X_n \in [0,1] = 1)$, to X_n zbiegają według rozkładu,
ii) założenie z i) nie jest konieczne.

2* Wykaż, że wzór
$$d(\mu,\nu) = \inf\Big\{\varepsilon > 0:\ \forall_t\ F_\mu(t-\varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t+\varepsilon) + \varepsilon\Big\}$$
definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilistycznych na $\mathbb{R}$ zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(\mu_n,\mu) \to 0$).

3* Zmienne losowe X_n są niezależne. Wykaż, że $\sum_{n=1}^\infty X_n$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

4. Załóżmy, że E jest przestrzenią polską (tzn. metryczną, ośrodkową i zupełną), zaś $(\mu_i)_{I\in I}$ prezwartą względem słabej zbieżnośći rodziną miar probabilistycznych na E (tzn. taką, że z każdego ciągu miar z tej rodziny można wybrać podciąg słabo zbieżny). Udowodnij, że
$$\forall_{\varepsilon,\delta>0}\ \exists_{x_1,x_2,\ldots,x_n\in E}\ \forall_{i\in I}\ \mu\Big(\bigcup_{k=1}^n B(x_k,\delta)\Big) \geqslant 1-\varepsilon$$
i wywnioskuj stąd, że rodzina $(\mu_i)_{I\in I}$ jest ciasna. (**Uwaga.** Prawdziwa jest też implikacja odwrotna - każda ciasna rodzina miar probabilistycznych na przestrzeni polskiej jest prezwarta względem słabej zbieżności).

5. Oblicz funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów tzn.
a) geometrycznego z parametrem p,
b) Poissona z parametrem λ,
c) dwumianowego z parametrami n, p,
d) jednostajnego na przedziale $[a,b]$,
e) normalnego $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$,
f) wykładniczego z parametrem λ,
g) Cauchy'ego z parametrem h.

6. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

7. Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcje
a) φ^2, b) $\mathrm{Re}(\varphi)$, c) $|\varphi|^2$, d) $|\varphi|$
muszą być funkcjami charakterystycznymi?

8. Wykaż, że dla zmiennych X przyjmujących tylko wartości całkowite zachodzi
$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt.$$

9* Udowodnij, że jeśli X ma rozkład ciągły z gęstością g, to $\varphi_X(t) \to 0$ dla $|t| \to \infty$.

10* Znajdź niecałkowalną zmienną losową X, której funkcja charakterystyczna jest różniczkowalna w 0.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 3
(zadania gwiazdkowe do oddania 29 października)

1. Korzystając z funkcji charakterystycznej oblicz $\mathbf{E}X^k$ dla $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2* Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla $k = 1, 2, \ldots$ i Y ma rozkład normalny, to X i Y mają ten sam rozkład.

3* Znajdź przykład zmiennych X i Y o różnych rozkładach, skończonych wszystkich momentach, takich, że $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

4. Pokaż, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.

5. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich t.

6. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X i $X+Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnij, że zmienna Y ma także rozkład normalny lub jest stała p.n..

7. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że zmienna $X - Y$ ma ten sam rozkład, co zmienna εX.

8. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

9. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.

10. Podaj przykład zmiennych losowych X_n takich, że $\varphi_{X_n} \to \varphi$ punktowo, ale φ nie jest funkcją charakterystyczna żadnego rozkładu na prostej.

11. Udowodnij, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ to zmienna $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.

12* a) Udowodnij, że $\varphi(x) = (1 - |x|) I_{(-1,1)}(x)$ jest funkcją charakterystyczną
b) Udowodnij, że jeśli $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$, kawałkami liniowa oraz $\varphi(0) = 1$ to φ jest funkcją charakterystyczną.
c)Udowodnij, że jeśli $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$, to φ jest funkcją charakterystyczną.

13* Wykaż, że funkcja $e^{-|t|^\alpha}$
a*) jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leqslant 1$,
b*) nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$,
c*) jest funkcją charakterystyczną dla $1 < \alpha \leqslant 2$.

14. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in R$, a Y jest niezależną kopią X?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 4
(zadania gwiazdkowe do oddania 5 listopada)

0. Wykaż, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ jest nieujemnie określona, to $f(t) = \overline{f(-t)}$ oraz $|f(t)| \leqslant f(0)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

1* Załóżmy, że zmienne X i Y są niezależne, mają jednakowy rozkład oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zmienna $aX + bY$ ma ten sam rozkład, co zmienna $(|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{1/\alpha} X$. Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej X.

2* Czy z równości dwu funkcji charakterystycznych na pewnym otoczeniu zera wynika równość rozkładów?

3. Dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0,1)$. Wykaż, że jeśli $(a_n)_n$ jest takim ciągiem liczb dodatnich, że $a_n \to 0$, $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to rozkład zmiennych $a_n X_n$ zbiega słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

4. Dana jest zmienna losowa X taka, że $\mathbf{E}X^2 < \infty$ oraz $X \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z)$, gdzie Y, Z są niezależnymi kopiami X. Wykaż, że $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dla pewnego $\sigma \geqslant 0$.

5* Wykaż, że teza poprzedniego zadania jest prawdziwa bez założenia $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = a) = \mathbf{P}(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

7. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że
$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1), \text{gdy } \lambda \to \infty.$$

8. Udowodnij, że
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k \leqslant n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

9. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnym zmiennymi losowymi takimi, że
$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Udowodnij, że $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$ oraz
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ przy } n \to \infty.$$

10. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$. Zbadaj zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 5
(zadania gwiazdkowe do oddania 19 listopada)

1* Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie oraz ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ jest ciasny. Wykaż, że zmienne X_i mają średnią zero i skończoną wariancję.

2. Wykaż warunek Lindeberga w przypadku gdy $X_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, gdzie $Y_1, Y_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych scentrowanych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i skończonej wariancji.

3. Zmienne X_i są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-1/2}(X_1 + X_2^3 + \ldots + X_n^{2n-1})$.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o średniej zero i wariancji 1. Ciąg (a_n) jest ograniczony oraz $s_n = (a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_n^2)^{1/2} \to \infty$. Wykaż, że $s_n^{-1}(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n)$ zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(0, 1)$.

5. Załóżmy, że $(X_{n,k})_{k \leqslant k_n}$ jest układem trójkątnym $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ oraz zachodzi warunek Prochorowa

$$\frac{1}{\sigma_n^p} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}|^p \to 0 \text{ przy } n \to \infty \text{ dla pewnego } p > 2.$$

Wykaż, że układ $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lindeberga.

6. Podaj przykład zależnych zmiennych losowych X, Y o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$ takich, że $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

7. Udowodnij, że zmienna $X \sim \mathcal{N}(a, B)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy, gdy B jest odwracalne oraz, że w tym ostatnim przypadku wynosi ona

$$g_X(x) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\Big(\frac{\langle C(x-a), x-a\rangle}{2}\Big), \text{ gdzie } C = B^{-1}.$$

8* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = 1$ oraz

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leqslant [nt]} X_i \text{ dla } t \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots.$$

Udowodnij, że dla dowolnych $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ ciąg wektorów losowych $(S_n(t_1), S_n(t_2), \ldots, S_n(t_k))$ jest zbieżny według rozkładu. Jak wygląda rozkład graniczny?

9* Dla $n = 1, 2, \ldots$ i $t \in [0, 1]$ określmy zmienną $T_n(t)$ wzorem

$$T_n(t) := (nt - \lfloor nt \rfloor) S_n\Big(\frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n}\Big) + (\lfloor nt \rfloor + 1 - nt) S_n\Big(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\Big),$$

gdzie S_n są takie jak w poprzednim zadaniu. Wówczas T_n można traktować jako zmienną o wartościach w $C[0, 1]$. Wykaż, że T_n są zbieżne według rozkładu. Co można powiedzieć o rozkładzie granicznym?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 6
(zadanie gwiazdkowe do oddania 3 grudnia)

1. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $\tau - 1$, $\tau + 1$ też są momentami zatrzymania (przyjąć $T = \mathbb{N}$)?

2. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B:
a) $\tau_1 = \inf\{n : X_n \in B\}$ – pierwsza wizyta w zbiorze B,
b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ – k-ta wizyta w zbiorze B.

3. Wykaż, że jeśli τ, σ są momentami zatrzymania ($T = \mathbb{N}$), to
a) jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
b) jeśli $\tau < \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$,
c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t.

4. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

5. Podaj przykład momentu zatrzymania τ, takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonej wariancji i średniej zero oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Wykaż, że S_n i $S_n^2 - \mathrm{Var}(S_n)$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez X_n.

7. Załóżmy, że $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Niech $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$.
a) Znajdź wszystkie liczby a takie, że $(a^n \cos(S_n), \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.
b) Wykaż, że dla dowolnego $\lambda > 0$, ciąg $(\exp(\lambda S_n - n\lambda^2/2), \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem.

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{E}|X_i| < \infty$ dla wszystkich i. Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez X_n wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{E}X_i = 1$ dla wszystkich $i \geqslant 2$ lub $X_1 = 0$ p.n..

9. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0. Wykaż, że ciąg Z_n dany wzorem $Z_0 = 0$ $Z_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \ldots + X_{n-1} X_n$, $n \geqslant 1$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

10. Niech $t \in \mathbb{R}$ oraz $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Przyjmijmy $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź wszystkie ciągi (a_n) takie, że $(e^{itS_n + a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

11. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmienymi losowymi takimi, że $P(X_i = \pm 1) = 1/2$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

12* Niech $(M_k)_{k=1}^n$ będzie martyngałem względem pewnej filtracji,a $p > 1$ spełnia $\mathbf{E}|M_1|^p < \infty$. Wykaż, że $\mathbf{E}|M_1|^p \leqslant \mathbf{E}|M_n|^p$ oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $M_1 = M_2 = \ldots = M_n$ p.n..

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 7
(zadania gwiazdkowe do oddania 10 grudnia)

1. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

2. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że $X_n = Y_n + Z_n$, gdzie Y_n jest martyngałem, a Z_n ciągiem prognozowalnym. Wykaż, że X_n jest nadmartyngałem wtedy i tylko wtedy gdy Z_n jest nierosnący.

3. Egzaminator przygotował na egzamin 20 zestawów pytań. Każdy z 15 zdających studentów losuje 1 zestaw, który później nie jest już używany. Student Abacki zna odpowiedź na dokładnie 10 z 20 zestawów. Od wychodzących z egzaminu dowiaduje się jakie pytania są już wylosowane. Jaka jest optymalna strategia (wybór momentu wejścia na egzamin) maksymalizująca szanse zdania egzaminu przez Abackiego?

4. Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają jednakowy rozkład o skończonej wariancji. Udowodnij, że $\mathbf{E}(S_\tau - \tau\mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau\mathrm{Var}(X_1)$, o ile $\mathbf{E}\tau < \infty$. Czy wzór musi być prawdziwy gdy $\mathbf{E}\tau = \infty$?

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1)$. Przyjmując $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ znajdź wszystkie liczby rzeczywiste λ dla których λ^{S_n} jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n).

6. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą niesymetryczną.

7. Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę
   a) monetą symetryczną
   b) monetę niesymetryczną.

8* Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygranie 1 zł przez A w grze orła i reszkę
   a) monetą symetryczną
   b) monetę niesymetryczną?

9* Czy ze zbieżności martyngału według prawdopodobieństwa wynika zbieżność prawie na pewno?

10* Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ zachodzi

$$\mathbf{E}\sup_n |X_n| \leqslant C(1 + \sup_n \mathbf{E}|X_n| \ln^+ |X_n|).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 8
(zadania gwiazdkowe do oddania 17 grudnia)

1. Niech $(\varepsilon_n)_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych o wartościach ± 1. Wykaż, że nadmartyngał
$$Z_n := e^{a(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) - (na^2/2)}$$
jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w L_1?

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Wykaż, że
$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$
tworzą martyngał (względem filtracji generowanej przez X_n) zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w L_1 .

3. Podaj przykład martyngału X_n takiego, że $X_n \to 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}|X_n| \to \infty$.

4. Wykaż, że jeśli (X_i) i (Y_i) są jednostajnie całkowalne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $(aX_i + bY_i)$ jest jednostajnie całkowalny.

5. Znajdź jednostajnie całkowalny ciąg X_n taki, że $\mathbf{E} \sup_n |X_n| = \infty$.

6. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunek $\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_i \mathbf{E}\varphi(|X_i|) < \infty$, to (X_i) jest jednostajnie całkowalny.

7. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^2. Wykaż, że ciąg $M_n = (n!)^{-2} X_1 \cdots X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n). Czy M_n jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^2? Czy jest zbieżny w L^1?

8* Niech Y_n będzie niezależnym ciągiem nieujemnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takich, że $\mathbf{E}Y_1 = 1$ i $\mathbf{P}(Y_1 = 1) < 1$. Wykaż, że $(Y_1 Y_2 \cdots Y_n, \sigma(Y_1, \ldots, Y_n))_{n \geqslant 1}$ jest martyngałem zbieżnym p.n., ale nie w L^1.

9* Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=-\infty}^{0}$ będzie martyngałem (z tzw. czasem odwróconym). Udowodnij, że granica $X = \lim_{n \to -\infty} X_n$ istnieje. Co można powiedzieć o X?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 9
(zadania gwiazdkowe do oddania 14 stycznia)

1* Czy istnieje jednostajnie całkowalny martyngał $(M_n)_{n\geqslant 0}$ taki, że $\mathbf{E}\sup|M_n| = \infty$?

2* Wykaż, że jeśli martyngał $(M_n, \mathcal{F}_n)$ jest jednostajnie całkowalny, to dla dowolnych momentów zatrzymania $\sigma \leqslant \tau$ takich, że $\tau < \infty$ p.n, $\mathbf{E}(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma$ p.n.

3. Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Rozstrzygnij, które z podanych poniżej procesów są łancuchami Markowa.
a) $X_0 = 0$, $X_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$
b) $Y_0 = 1$, $Y_n = \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$, , $n = 1, 2, \ldots$
c) $Z_n = (-1)^{\varepsilon_n}$, , $n = 1, 2, \ldots$
d) $W_n = \varepsilon_n\varepsilon_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$
e) $V_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$, $n = 1, 2 \ldots$.

4. Załóżmy, że E jest zbiorem przeliczalnym, $f\colon E\times\mathbb{R} \to E$ jest funkcją mierzalną (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne), Y_0 pewną zmienną o wartościach w E, zaś $X_0, X_1, \ldots$ ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Definiujemy

$$Y_{n+1} = f(X_n, Y_n) \text{ dla } n = 0, 1, \ldots.$$

Wykaż, że (Y_n) jest łańcuchem Markowa.

5. Dwa jednorodne łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia P są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

6. (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w E. Wykaż, że dla dowolnej funkcji różnowartościowej $f: E \to E$, $(f(X_n))$ jest łańcuchem Markowa. Czy tak być musi, jeśli nie założymy różnowartościowości f?

7* Prawdopodobieństwo, że bakteria ma n potomków wynosi p_n dla $n = 0, 1, \ldots$. Zakładając, że bakterie w ntym pokoleniu rozmnażają się równocześnie i niezależnie udowodnij, że populacja bakterii (licząca w chwili 0, $N > 0$ bakterii) nigdy nie wyginie z prawdopodobieństwem dodatnim wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k=0}^{\infty} kp_k > 1$ lub $p_1 = 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 10
(zadania gwiazdkowe do oddania 21 stycznia)

1. Dla łańcuchów Markowa o przestrzeni stanów $\{1, 2, 3, 4\}$ i poniższych macierzach przejścia znajdź wszystkie stany nieistotne i wszystkie zamknięte zbiory stanów.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Udowodnij, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma właściwych podzbiorów zamkniętych.

3. Zmienne $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$. Ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest określony następująco: $X_0 \equiv 1$ p.n., a dla $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } Y_n = 1, \\ X_n Y_n & \text{jeśli } Y_n \neq 1. \end{cases}$$

a) Wykaż, że $(X_n)_n$ jest nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa.
b) Czy ten łańcuch jest okresowy?
c) Udowodnij, że wszystkie stany są powracające.

4. Wykaż, że skończony łańcuch Markowa ma przynajmniej jeden stan powracający.

5. Wykaż, że jeśli y jest stanem chwilowym to $\sum_{n=0}^{\infty} p_{x,y}(n) < \infty$ dla wszystkich x, w szczególności $\lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = 0$.

6. Udowodnij, że nieprzywiedlny łańcuch Markowa jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy $F_{x,y} = 1$ dla wszystkich x, y.

7. Wykaż, że w powracalnym i nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwem 1 każdy stan jest odwiedzany nieskończenie wiele razy (niezależnie od rozkładu początkowego).

8* Rozpatrzmy błądzenie w $\mathbb{Z}^k$ z macierzą przejścia $p_{x,y} = \frac{1}{2k}$ gdy $\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| = 1$ oraz $p_{x,y} = 0$ dla pozostałych x, y. Dla jakich k jest to błądzenie powracalne?

9* Stan x łańcucha Markowa x nazywamy niezerowym, jeśli średni czas powrotu do x jest skończony, zaś zerowym w przeciwnym przypadku. Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracalnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są niezerowe lub wszystkie są zerowe.

10* Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracającym łańcuchu Markowa stan y jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} p_{xy}(n) = 0$ dla wszystkich stanów x.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 11

1. Zbadaj okresowość łańcuchów o poniższych macierzach przejścia:

$$a)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Niech (X_n) będzie nieprzywiedlnym okresowym łańcuchem Markowa na E z macierzą przejścia P i okresem $d > 1$. Udowodnij, że istnieje rozkład $E = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_d$ taki, że zbiory S_i spełniają warunki:
a) $p_{xy} > 0 \Rightarrow x \in S_i, y \in S_{i+1}$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, d$ (przyjmujemy $S_{d+1} = S_1$).
b) na każdym S_i macierz $(p_{xy}(d))_{x,y \in S_i}$ definiuje nieprzywiedlny, nieokresowy łańcuch Markowa.

3. Jednorodny łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $\{0, 1, 2 \ldots\}$ ma macierz przejścia $(p_{n,m})_{n,m \geqslant 0}$ taką, że $p_{0,1} = 1$, $p_{n,n+1} = 1 - p_{n,n-1} = p$ dla $n = 1, 2 \ldots$, gdzie $p \in (0, 1)$. W zależności do parametru p wyznacz wszystkie rozkłady stacjonarne.

4. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.

5. Ciąg niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots$ ma wspólny rozkład taki, że $\mathbf{P}(Y_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(Y_i = -1) = p$. Definiujemy rekurencyjnie ciąg X_n wzorami $X_0 = 1$, $X_{n+1} = \max(X_n, 1) + Y_n$. Wykaż, że ciąg ten jest łańcuchem Markowa. Znajdź rozkład stacjonarny, o ile istnieje.

6. W powiecie N. syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem 3/4, a syn niepiekarza z prawdopodobieństwem 1/100. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? A potomek w n-tym pokoleniu? Jaki procent ludzi w N. stanowią piekarze?

7. Udowodnij twierdzenie o istnieniu rozkładu stacjonarnego dla łańcuchów z przeliczalną przestrzenią stanów bez używania twierdzenia Brouwera.

8. (X_n) jest łańcuchem Markowa, czy wynika stąd, że
a) $\mathbf{P}(X_n = a_{k+1} | X_{i_k} = a_k, X_{i_{k-1}} = a_{k-1}, \ldots, X_{i_1} = a_1) = \mathbf{P}(X_n = a_{k+1} | X_{i_k} = a_k)$ dla dowolnych liczb całkowitych $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n$ oraz stanów $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$?
b) $\mathbf{P}(X_n \in A_{k+1} | X_{i_k} \in A_k, X_{i_{k-1}} \in A_{k-1}, \ldots, X_{i_1} \in A_1) = \mathbf{P}(X_n \in A_{k+1} | X_{i_k} \in A_k)$ dla dowolnych liczb całkowitych $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n$ oraz zbiorów stanów $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$?