Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 1

Mówimy, że ciąg zmiennych losowych X_n zbiega według rozkładu do zmiennej losowej X, jeśli dla dowolnej funkcji ciągłej ograniczonej f, $\mathbf{E}f(X_n) \to \mathbf{E}f(X)$.

1. Udowodnij, że dla dowolnych punktów x_n, x w przestrzeni metrycznej E $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy gdy $x_n \to x$.

2. Wykaż, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$.

3. Wykaż, że:
a) jeśli $X_n \to X$ p.n., to $X_n \Rightarrow X$;
b) jeśli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \Rightarrow X$;
c) jeśli $X_n \Rightarrow c$ gdzie c jest stałą to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.

4. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
b) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?

5. Niech X będzie rzeczywistą zmienną losową. Wykaż, że istnieje ciąg zmiennych X_n zbieżny według rozkładu do X taki, że
a) każde X_n przyjmuje tylko skończenie wiele wartości,
b) zmienne X_n mają gęstość.

6. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

7* Niech g_{X_n}, g_X będą gęstościami rzeczywistych zmiennych losowych. Wykaż, że jeśli $g_{X_n}(t) \to g_X(t)$ dla p.w. t to $X_n \Rightarrow X$.

8. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$ to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbf{E}|X_n|^p \to \mathbf{E}|X|^p$. Jest to jednak prawdą gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

9* Niech $x \in (0,1)$ będzie liczbą niewymierną. Wykaż,że

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\{kx \bmod 1\}} \Rightarrow \lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$. Co się dzieje, gdy x jest wymierne?

10* Wykazać, że dla rzeczywistych zmiennych losowych $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedu gdy istnieją zmienne losowe $\tilde{X}_n \sim X_n$ i $\tilde{X} \sim X$ takie, że X_n jest zbieżny do X według prawdopodobieństwa.

11. Udowodnij, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n, X niezależne od Y oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$ to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 2

1. Załóżmy, że X jest niezdegenerowaną zmienną losową. Wykaż, że zmienne $a_nX + b_n$ zbiegają według rozkładu do zmiennej $aX + b$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$ i $b_n \to b$.

2. Podaj przykład ciągu dystrybuant F_{X_n}, zbieżnego punktowo do funkcji, która nie jest dystrybuantą. Czy może się zdarzyć, że zmienne X_n są zbieżne według rozkładu?

3* Wykaż, że

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ \forall_t \ F_\mu(t - \varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t + \varepsilon) + \varepsilon\}$$

definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilstycznych na $\mathbb{R}$ zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu \Leftrightarrow d(\mu_n, \mu) \to 0$).

4** Zmienne losowe X_n są niezależne. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

5* Załóżmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n^k = \frac{1}{k+1}$. Czy z tego wynika, że X_n jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6* Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz dystrybuanta F_X jest ciągła, to F_{X_n} zbiega jednostajnie do F_X.

7. Niech X_n będzie pierwszą współrzędną rozkładu jednostajnego na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że $\sqrt{n}X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

8. Wykaż, że rodzina zmiennych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha| < \infty, \sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

9** Udowodnij, że twierdzenie Prochorowa zachodzi na przestrzeni polskiej tzn. metrycznej, zupełnej, ośrodkowej.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 3

1. Oblicz funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów tzn.
a) geometrycznego z parametrem p,
b) Poissona z parametrem λ,
c) dwumianowego z parametrami n, p,
d) jednostajnego na przedziale $[a, b]$,
e) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$,
f) wykładniczego z parametrem λ,
g) Cauchy'ego z parametrem h.

2. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

3* Udowodnij, że jeśli $\varphi_X''(0)$ istnieje to $\mathbf{E}X^2 < \infty$

4. Wykaż, że dla zmiennych X przyjmujących tylko wartości całkowite zachodzi
$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt.$$

5* Udowodnij, że jeśli X ma rozkład ciągły z gęstością g to $\varphi_X(t) \to 0$ dla $|t| \to \infty$.

6. Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcje
a) φ^2,
b) $\mathrm{Re}(\varphi)$,
c) $|\varphi|^2$,
d) $|\varphi|$
muszą być funkcjami charakterystycznymi?

7. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich t.

8. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

9* a) Udowodnij, że $\varphi(x) = (1-|x|)I_{(-1,1)}(x)$ jest funkcją charakterystyczną
b) Udowodnij, że jeśli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$, kawałkami liniowa oraz $\varphi(0) = 1$ to φ jest funkcją charakterystyczną.
c)Udowodnij, że jeśli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$, to φ jest funkcją charakterystyczną.

10. Wykaż, że funkcja $e^{-|t|^\alpha}$
a*) jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leqslant 1$,
b*) nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$,
c**) jest funkcją charakterystyczną dla $1 < \alpha \leqslant 2$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 4

1. Udowodnij, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ to zmienna $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na $[-1,1]$.

2. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.

3* Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla $k = 1, 2, \ldots$ i Y ma rozkład normalny, to X i Y mają ten sam rozkład.

4** Znajdź przykład zmiennych X i Y o różnych rozkładach i skończonych wszystkich momentach, takich, że $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

5. Podaj przykład zmiennych losowych X_n takich, że $\varphi_{X_n} \to \varphi$ punktowo, ale φ nie jest funkcją charakterystyczna żadnego rozkładu na prostej.

6. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a Y jest niezależną kopią X?

7* Czy z równości dwu funkcji charakterystycznych na pewnym otoczeniu zera wynika równość rozkładów?

8* Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że $aX + bY \sim (|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{1/\alpha} X$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ (Y oznacza niezależną kopię X).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II*- 5

1. Wykaż, że warunek Lyapunowa
$$\exists_{\delta>0}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k\leqslant k_n}\mathbf{E}|X_{n,k}-EX_{n,k}|^{2+\delta}=0$$
implikuje warunek Lindeberga (zakładamy, że $\sigma_n^2\to\sigma^2>0$).

2. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że
$$\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\to\mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu gdy } \lambda\to\infty.$$

3* Udowodnij, że
$$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k\leqslant n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}.$$

4. Rzucamy 1000 razy kostką. Oszacuj prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie między 3400 a 3600.

5. Zmienne $X_1,X_2,\ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i=a)=\mathbf{P}(X_i=1/a)=1/2$ dla pewnego $a>1$. Wykaż, że zmienne $Z_n=(X_1X_2\cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

6. Zmienne $X_1,X_2,\ldots$ są niezależne przy czym $\mathbf{P}(X_k=k)=\mathbf{P}(X_k=-k)=1/2$ Niech $\sigma_n=\sum_{k=1}^n\mathrm{Var}(X_k)$ Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu
$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sigma_n}.$$

7. Niech $X_1,X_2,\ldots$ będą niezależnym zmiennymi losowymi takimi, że
$$\mathbf{P}(X_n=\pm1)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n^2}),\quad \mathbf{P}(X_n=\pm n)=\frac{1}{2n^2}.$$
Udowodnij, że $\mathrm{Var}(X_n)\to2$ oraz
$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}\to\mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu.}$$

8* Dana jest zmienna losowa X taka, że $\mathbf{E}X^2<\infty$ oraz $X\sim\frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z)$, gdzie Y,Z są niezależnymi kopiami X. Wykaż, że $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ dla pewnego $\sigma\geqslant0$.

9** Wykaż, że teza poprzedniego zadania jest prawdziwa bez założenia $\mathbf{E}X^2<\infty$.

11** Wykaż, że jeśli zmienne X i Y są niezależne oraz $X+Y$ ma rozkład normalny to obie zmienne X i Y są normalne.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 6

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Zbadać zbieżność względem rozkładu ciągów

$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

2. Podaj przykład zależnych zmiennych losowych X, Y o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ takich, że $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

3. Udowodnij, że zmienna $X \sim \mathcal{N}(a, B)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy gdy B jest odwracalne oraz, że w tym ostatnim przypadku wynosi ona

$$g_X(x) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(\frac{\langle C(x-a), x-a\rangle}{2}\right), \text{ gdzie } C = B^{-1}.$$

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = 1$ oraz

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leqslant [nt]} X_i \text{ dla } t \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots.$$

Udowodnij, że dla dowolnych $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ ciąg wektorów losowych $(S_n(t_1), S_n(t_2), \ldots, S_n(t_k))$ jest zbieżny według rozkładu. Jak wygląda rozkład graniczny?

5** Dla $n = 1, 2, \ldots$ i $t \in [0,1]$ określmy zmienną $T_n(t)$ wzorem

$$T_n(t) := (nt - \lfloor nt \rfloor) S_n(\frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n}) + (\lfloor nt \rfloor + 1 - nt) S_n(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}),$$

gdzie S_n są takie jak w poprzednim zadaniu. Wówczas T_n można traktować jako zmienną o wartościach w $C[0,1]$. Wykaż, że T_n są zbieżne według rozkładu. Co można powiedzieć o rozkładzie granicznym?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 7

1. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $\tau - 1$, $\tau + 1$ też są momentami zatrzymania (przyjąć $T = \mathbb{N}$)?

2. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B:
a) $\tau_1 = \inf\{n : X_n \in B\}$ – pierwsza wizyta w zbiorze B,
b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ – k-ta wizyta w zbiorze B.

3. Wykaż, że jeśli τ, σ są momentami zatrzymania ($T = \mathbb{N}$), to
a) jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
b) jeśli $\tau < \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$,
c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t.

4. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

5* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmienymi losowymi takimi, że $P(X_i = \pm 1) = 1/2$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{E}|X_i| < \infty$ dla wszystkich i. Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{E}X_i = 1$ dla wszystkich i lub $X_1 = 0$ p.n..

7. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$. Znajdź liczby a_n, b_n dla których $S_n^2 + a_n S_n + b_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$.

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Dla $\lambda > 0$ znajdź liczby a_n takie, że $(e^{\lambda S_n - a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

9* Niech $(M_k)_{k=1}^{n}$ będzie martyngałem względem pewnej filtracji,a $p > 1$ spełnia $\mathbf{E}|M_1|^p < \infty$. Wykaż, że $\mathbf{E}|M_1|^p \leqslant \mathbf{E}|M_n|^p$ oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $M_1 = M_2 = \ldots = M_n$ p.n..

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 8

1. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

2. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że $X_n = Y_n + Z_n$, gdzie Y_n jest martyngałem, a Z_n ciągiem prognozowalnym. Wykaż, że X_n jest nadmartyngałem wtedy i tylko wtedy gdy Z_n jest niemalejący.

3. Egzaminator przygotował na egzamin 20 zestawów pytań. Każdy z 15 zdających studentów losuje 1 zestaw, który później nie jest już używany. Student S zna odpowiedź na dokładnie 10 z 20 zestawów. Od wychodzących z egzaminu dowiaduje się jakie pytania są już wylosowane. Jaka jest optymalna strategia (wybór momentu wejścia na egzamin) maksymalizująca szanse zdania egzaminu przez S?

4. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie takim, że $EX_i^2 < \infty$. Udowodnij, że $\mathbf{E}(S_\tau - \tau\mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau\mathrm{Var}(X_1)$, o ile $Ex\tau < \infty$. Czy wzór musi być prawdziwy gdy $\mathbf{E}\tau = \infty$?

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1)$. Przyjmując $S_0 = 0$ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ znajdź wszystkie liczby rzeczywiste λ dla których λ^{S_n} jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n).

6. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą niesymetryczną.

7* Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

8* Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygranie 1 zł. przez A w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

9* Udowodnij, że dla podmartyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$

$$\forall_{t>0}\ \mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k| > t) \leqslant 3\frac{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{E}|X_k|}{t}$$

oraz w przypadku $X_n \geqslant 0$ lub $X_n \leqslant 0$ dla wszystkich n, stałą 3 można zamienić na 1.

10* Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ zachodzi

$$\mathbf{E}\sup_n |X_n| \leqslant C(1 + \sup_n \mathbf{E}|X_n| \ln^+ |X_n|).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 9

1 Podaj przykład martyngału X_n takiego, że $X_n \to 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}|X_n| \to \infty$.

2* Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=-\infty}^0$ będzie martyngałem (z tzw. czasem odwróconym). Udowodnij, że granica $X = \lim_{n\to-\infty} X_n$ istnieje. Co można powiedzieć o X?

3* Czy ze zbieżności martyngału według prawdopodobieństwa wynika zbieżność prawie na pewno?

4. Podaj przykład martyngału takiego, że $\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$, który nie jest zbieżny w L^1.

5. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe X_n są zbieżne w L^p, $p \geqslant 1$ to $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowalny (zatem $X_n \to X$ w L^p wtedy i tylko wtedy gdy $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa oraz $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowalny).

6. Wykaż, że jeśli X_t i Y_t są jednostajnie całkowalne to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $aX_t + bY_t$ jest jednostajnie całkowalny.

7. Znajdź jednostajnie całkowalny ciąg X_n taki, że $\mathbf{E}\sup_n |X_n| = \infty$.

8. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunek $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_t \mathbf{E}\varphi(|X_t|) < \infty$ to (X_t) jest jednostajnie całkowalny.

9* Niech Y_n będzie niezależnym ciągiem nieujemnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takich, że $\mathbf{E}Y_1 = 1$ i $\mathbf{P}(Y_1 = 1) < 1$. Wykaż, że $(Y_1 Y_2 \cdots Y_n, \sigma(Y_1, \ldots, Y_n))_{n\geqslant 1}$ jest martyngałem zbieżnym p.n., ale nie w L^1.

10* Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie taki, że $\mathbf{E}|X_i| < \infty$, niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$.
a) Udowodnij, że $(\frac{S_n}{n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem z czasem odwróconym.
b) Wywnioskuj stąd silne prawo wielkich liczb Kołmogorowa $\frac{S_n}{n} \to \mathbf{E}X_i$ p.n. i w L^1.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 10

1 Dany jest zbiór przeliczalny E i funkcje borelowskie $\varphi_n : E \times \mathbb{R} \to E$, $n = 1, 2, \ldots$ (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne). Zmienne losowe X_0 o wartościach w E i $U_1, U_2, \ldots$ o wartościach rzeczywistych są niezależne. Udowodnij, że ciąg $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $X_{n+1} = \varphi_n(X_n, U_n)$ jest łańcuchem Markowa.

2. Dwa łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia P są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

3. Zmienne $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Czy ciągi $X_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $Y_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ są łańcuchami Markowa?

4. (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w E. Czy dla dowolnej funkcji $f : E \to E$, $(f(X_n))$ musi być łańcuchem Markowa?

5. Zmienne $X_0, X_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1) = p \in (0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $M_n = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Które z ciągów $|S_n|, M_n, M_n - S_n$ są łańcuchami Markowa? Znajdź odpowiednie macierze przejścia.

6. Udowodnij, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma właściwych podzbiorów zamkniętych.

7* Prawdopodobieństwo, że bakteria ma n potomków wynosi p_n dla $n = 0, 1, \ldots$. Zakładając, że bakterie w ntym pokoleniu rozmnażają się równocześnie i niezależnie udowodnij, że populacja bakterii (licząca w chwili 0, $N > 0$ bakterii) nigdy nie wyginie z prawdopodobieństwem dodatnim wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k > 1$ lub $p_1 = 1$.

8. Wykaż, że skończony łańcuch Markowa ma przynajmniej jeden stan powracający.

9* Rozpatrzmy błądzenie w $\mathbb{Z}^k$ z macierzą przejścia $p_{x,y} = \frac{1}{2k}$ gdy $\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| = 1$ oraz $p_{x,y} = 0$ dla pozostałych x, y. Dla jakich k jest to błądzenie powracalne?

10. Wykaż, że jeśli y jest stanem chwilowym to $\sum_{n=0}^{\infty} p_{x,y}(n) < \infty$ dla wszystkich x, w szczególności $\lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = 0$.

11* Udowodnij, że łańcuch Markowa jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy $F_{x,y} = 1$ dla wszystkich x, y.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 11

1* Dane są dwa niezależne błądzenia symetryczne X_n, Y_n w w $\mathbb{Z}^d$. Wyznacz wszystkie d dla których $\mathbf{P}(\exists n \geqslant 1\ X_n = Y_n) = 1$, tzn. z prawdopodobieństwem 1 błądzenia się przecinają?

2 Niech (X_n) będzie nieprzywiedlnym okresowym łańcuchem Markowa na E z macierzą przejścia P i okresem $d > 1$. Udowodnij, że istnieje rozkład $E = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_d$ taki, że zbiory S_i spełniają warunki:
a) $p_{xy} > 0 \Rightarrow x \in S_i, y \in S_{i+1}$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, d$ (przyjmujemy $S_{d+1} = S_1$).
b) na każdym S_i macierz $(p_{xy}(d))_{x,y \in S_i}$ definiuje nieprzywiedlny, nieokresowy łańcuch Markowa.

3 Wykaż, że w powracalnym i nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwem 1 każdy stan jest odwiedzany nieskończenie wiele razy (niezależnie od rozkładu początkowego).

4. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.

5. Ciąg niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots$ ma wspólny rozkład taki, że $\mathbf{P}(Y_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(Y_i = -1) = p$. Definiujemy rekurencyjnie ciąg X_n wzorami $X_0 = 1$, $X_{n+1} = \max(X_n, 1) + Y_n$. Wykaż, że ciąg ten jest łańcuchem Markowa. Znajdź rozkład stacjonarny, o ile istnieje.

6. W powiecie N. syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem 3/4, a syn niepiekarza z prawdopodobieństwem 1/100. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? A potomek w n-tym pokoleniu? Jaki procent ludzi w N. jest piekarzem?

7* Udowodnij twierdzenie o istnieniu rozkładu stacjonarnego dla łańcuchów z przeliczalną przestrzenią stanów bez używania twierdzenia Brouwera.

8* Stan x łańcucha Markowa x nazywamy niezerowym, jeśli średni czas powrotu do x jest skończony, zaś zerowym w przeciwnym przypadku. Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracalnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są niezerowe lub wszystkie są zerowe.

9* Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracającym łańcuchu Markowa stan y jest zerowy wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} p_{xy}(n) = 0$ dla wszystkich stanów x.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - II*-12

1 Udowodnij, że dla łańcuchów Markowa ze skończoną przestrzenią stanów E i dowolnego niepustego podzbioru $F \subset E$ układy równań

$$\begin{cases} p_F(x) = 1 & \text{dla } x \in F \\ p_F(x) = \sum_{y \in E} p_{xy} p_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ p_F(x) = 0 & \text{jeśli } \forall_n \forall_{y \in F}\ p_{xy}(n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_F(x) = 0 & \text{dla } x \in F \\ m_F(x) = 1 + \sum_{y \in E} p_{xy} m_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ m_F(x) = \infty & \text{jeśli } p_F(x) < 1 \end{cases}$$

mają dokładnie jedno rozwiązanie

2. Po wierzchołkach sześcianu porusza się w sposób losowy mucha - w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1/3$ przenosi się do jednego z sąsiednich wierzchołków. Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha powróci do punktu wyjścia nie odwiedzając wcześniej przeciwległego wierzchołka oraz średnią liczbę kroków jakie zajmie jej powrót do punktu wyjścia.

W zadaniach 4–8 $W = (W_t)_{t \in [0,\infty)}$ jest procesem Wienera

4. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
b) $Y_t = c^{-1/2} X_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
c) $Z_t = tX_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
d) $U_t = X_{T+t} - X_T, T \geqslant 0$
e) $V_t = X_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2X_T - X - t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

5. Udowodnij, że W_t i $W_t^2 - t$ są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$.

6. Udowodnij, że $\lim_{t \to \infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.p.

7 Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n.p., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

8 Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.