Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 1
(zadania gwiazdkowe do oddania 11 października)

1. Niech E_1 będzie niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej (E, ρ), a X_n i X będą zmiennymi o wartościach w E_1. Wykaż, że zbieżnościoi wg rozkładu X_n do X w przestrzeniach (E_1, ρ) i (E, ρ) są równoważne.

2. Wykaż, że:
a) jeśli $X_n \to X$ p.n., to $X_n \Rightarrow X$;
b) jeśli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \Rightarrow X$;
c) jeśli $X_n \Rightarrow c$, gdzie c jest stałą, to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.

3* Wykaż, że dla rzeczywistych zmiennych losowych $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zmienne losowe $\tilde{X}_n$ o tym samym rozkładzie co X_n i $\tilde{X}$ o tym samym rozkładzie co X takie, że $\tilde{X}_n$ jest zbieżny do $\tilde{X}$ p.n.

4. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
b) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?

5. Czy teza punktu a) poprzedniego zadania się zmieni, jeśli zmienne X_n przyjmują wartości wymierne?

6. Wykaż, że jeśli $np_n \to \lambda$, to $\mathrm{Bin}(n, p_n) \Rightarrow \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

7. Niech X będzie rzeczywistą zmienną losową. Wykaż, że istnieje ciąg zmiennych X_n zbieżny według rozkładu do X taki, że
a) każde X_n przyjmuje tylko skończenie wiele wartości,
b) zmienne X_n mają gęstość.

8. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$ oraz $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

9* Załóżmy, że X jest niezdegenerowaną rzeczywistą zmienną losową (tzn. $\mathbf{P}(X = x) < 1$ dla wszystkich x). Wykaż, że zmienne $a_n X + b_n$, $a_n \geqslant 0$ zbiegają według rozkładu do zmiennej $aX + b$, $a \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$ i $b_n \to b$.

10. Dane są zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ takie, że

$$\mathbf{P}\left(X_n = \frac{j}{n}\right) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Wykaż, że ciąg X_n jest zbieżny według rozkładu i wyznacz rozkład graniczny.

11. Niech g_{X_n}, g_X będą gęstościami odpowiednich rzeczywistych zmiennych losowych. Wykaż, że jeśli $g_{X_n}(t) \to g_X(t)$ dla p.w. t, to $X_n \Rightarrow X$.

12. Co trzeba założyć o funkcji f, by z tego, że X_n jest zbieżne według rozkładu do X wynikała zbieżność według rozkładu $f(X_n)$ do $f(X)$?

13. Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz dystrybuanta F_X jest ciągła, to F_{X_n} zbiega jednostajnie do F_X.

14* Niech X_n będzie pierwszą współrzędną rozkładu jednostajnego na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że $\sqrt{n} X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 2
(zadania gwiazdkowe do oddania 18 października)

1. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$, to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbf{E}|X_n|^p \to \mathbf{E}|X|^p$. Pokaż, że jest to jednak prawdą, gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

2* Niech $x \in (0,1)$ będzie liczbą niewymierną. Wykaż,że
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\{kx \mathrm{mod} 1\}} \Rightarrow \lambda,$$
gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $[0,1]$. Co się dzieje, gdy x jest wymierne?

3. Załóżmy, że $X_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow Y$. Wykaż, że jeśli Y jest stałe p.n., to $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$ oraz $X_n Y_n \Rightarrow XY$. Czy implikacja jest prawdziwa, jeśli Y nie jest zdegenerowaną zmienną losową?

4. Załóżmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n^k = \frac{1}{k+1}$. Wykaż, że
i) jeśli $\mathbf{P}(X_n \in [0,1] = 1)$, to X_n zbiegają według rozkładu,
ii) założenie z i) nie jest konieczne.

5* Wykaż, że wzór
$$d(\mu,\nu) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 :\ \forall_t\ F_\mu(t-\varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t+\varepsilon) + \varepsilon\Big\}$$
definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilistycznych na $\mathbb{R}$ zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(\mu_n,\mu) \to 0$).

6. Udowodnij, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n, X niezależne od Y oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

7. Wykaż, że rodzina rozkładów normalnych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha|$, $\sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

8. Dana jest rodzina rozkładów

   a) wykładniczych $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$,

   b) jednostajnych $\{U(a,b) : a, b \in A,\ a < b\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

   Jaki warunek musi spełniać zbiór A, aby ta rodzina była ciasna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 3
(zadania gwiazdkowe do oddania 25 października)

1. Oblicz funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów tzn.
a) geometrycznego z parametrem p,
b) Poissona z parametrem λ,
c) dwumianowego z parametrami n, p,
d) jednostajnego na przedziale $[a, b]$,
e) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$,
f) wykładniczego z parametrem λ,
g) Cauchy'ego z parametrem h.

2. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

3. Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcje
a) φ^2,   b) $\mathrm{Re}(\varphi)$,   c) $|\varphi|^2$,   d) $|\varphi|$
muszą być funkcjami charakterystycznymi?

4. Pokaż, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.

5. Wykaż, że dla zmiennych X przyjmujących tylko wartości całkowite zachodzi
$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt.$$

6* Udowodnij, że jeśli X ma rozkład ciągły z gęstością g, to $\varphi_X(t) \to 0$ dla $|t| \to \infty$.

7* Znajdź niecałkowalną zmienną losową X, której funkcja charakterystyczna jest różniczkowalna w 0.

8. Korzystając z funkcji charakterystycznej oblicz $\mathbf{E}X^k$ dla $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

9. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich t.

10. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X i $X+Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnij, że zmienna Y ma także rozkład normalny lub jest stała p.n..

11. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że zmienna $X - Y$ ma ten sam rozkład, co zmienna εX.

12. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

13. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 4
(zadania gwiazdkowe do oddania 8 listopada)

1. Wykaż, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X jest dwukrotnie różniczkowalna w 0, to $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

2. Udowodnij, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ to zmienna $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na $[-1,1]$.

3. Dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0,1)$. Wykaż, że jeśli $(a_n)_n$ jest takim ciągiem liczb dodatnich, że $a_n \to 0$, $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to rozkład zmiennych $a_n X_n$ zbiega słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

4* a) Udowodnij, że $\varphi(x) = (1-|x|)I_{(-1,1)}(x)$ jest funkcją charakterystyczną
b) Udowodnij, że jeśli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0,\infty)$, kawałkami liniowa oraz $\varphi(0) = 1$ to φ jest funkcją charakterystyczną.
c)Udowodnij, że jeśli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0,\infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$, to φ jest funkcją charakterystyczną.

5* Wykaż, że funkcja $e^{-|t|^\alpha}$
a*) jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leqslant 1$,
b*) nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$,
c*) jest funkcją charakterystyczną dla $1 < \alpha \leqslant 2$.

6. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0,2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in R$, a Y jest niezależną kopią X?

7. Czy z równości dwu funkcji charakterystycznych na pewnym otoczeniu zera wynika równość rozkładów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 5

(zadania gwiazdkowe do oddania 15 listopada)

1. Dana jest zmienna losowa X taka, że $\mathbf{E}X^2 < \infty$ oraz $X \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z)$, gdzie Y, Z są niezależnymi kopiami X. Wykaż, że $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ dla pewnego $\sigma \geqslant 0$.

2* Wykaż, że teza poprzedniego zadania jest prawdziwa bez założenia $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = a) = \mathbf{P}(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

4. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że
$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad \text{gdy } \lambda \to \infty.$$

5. Udowodnij, że
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k\leqslant n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnym zmiennymi losowymi takimi, że
$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Udowodnij, że $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$ oraz
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ przy } n \to \infty.$$

7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$. Zbadaj zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

8* Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie oraz ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ jest ciasny. Wykaż, że zmienne X_i mają średnią zero i skończoną wariancję.

9. Zmienne X_i są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1,1]$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-1/2}(X_1 + X_2^3 + \ldots + X_n^{2n-1})$.

10. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o średniej zero i wariancji 1. Ciąg (a_n) jest ograniczony oraz $s_n = (a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_n^2)^{1/2} \to \infty$. Wykaż, że $s_n^{-1}(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n)$ zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(0,1)$.

11. Załóżmy, że $(X_{n,k})_{k\leqslant k_n}$ jest układem trójkątnym oraz zachodzi warunek Prochorowa
$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}|^p \to 0 \text{ przy } n \to \infty \quad \text{dla pewnego } p > 2.$$
Wykaż, że układ $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lindeberga.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 6
(zadania gwiazdkowe do oddania 22 listopada)

1. Udowodnij, że zmienna $X \sim \mathcal{N}(a, C)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy, gdy C jest odwracalne oraz, że w tym ostatnim przypadku wynosi ona
$$g_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(C)}} \exp(-\frac{\langle C^{-1}(x-a), x-a\rangle}{2}).$$

2. Załóżmy, że ε, X są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Niech $Y = \varepsilon X$. Wykaż, że Y też ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Czy zmienne X i Y są niezależne?

3. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi d-wymiarowymi wektorami losowymi o jednakowym rozkładzie o średniej zero i macierzy kowariancji C. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, zaś f będzie funkcją z $\mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^k$ różniczkowalną w zerze. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $\sqrt{n}(f(S_n/n) - f(0))$.

4* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = 1$ oraz
$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leqslant [nt]} X_i \text{ dla } t \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots.$$
Udowodnij, że dla dowolnych $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ ciąg wektorów losowych $(S_n(t_1), S_n(t_2), \ldots, S_n(t_k))$ jest zbieżny według rozkładu. Jak wygląda rozkład graniczny?

5* Dla $n = 1, 2, \ldots$ i $t \in [0,1]$ określmy zmienną $T_n(t)$ wzorem
$$T_n(t) := (nt - \lfloor nt \rfloor) S_n(\frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n}) + (\lfloor nt \rfloor + 1 - nt) S_n(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}),$$
gdzie S_n są takie jak w poprzednim zadaniu. Wówczas T_n można traktować jako zmienną o wartościach w $C[0,1]$. Wykaż, że T_n są zbieżne według rozkładu. Co można powiedzieć o rozkładzie granicznym?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 7

1. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $(\tau - 1)_+$, $\tau + 1$ też muszą być momentami zatrzymania?

2. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B:
   a) $\tau_1 = \inf\{n\colon\ X_n \in B\}$ – pierwsza wizyta w zbiorze B,
   b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1}\colon\ X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ – k-ta wizyta w zbiorze B.

3. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Wykaż, że
   a) jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
   b) jeśli $\tau < \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.
   c) Zakładając dodatkowo, że T jest przeliczalny udowodnij, że $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$.
   d) Podaj przykład filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ i zmiennej nieujemnej τ, która nie jest momentem zatrzymania, ale $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \geqslant 0$.

4. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

5. Wykaż, że moment zatrzymania τ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalny i podaj przykład momentu zatrzymania τ, takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

6. Niech $(S_n)_{n \geqslant 0}$ oznacza symetryczne błądzenie po prostej startujące z 0, zaś τ pierwszy moment dotarcia przez S_n do 1. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 8
(zadania gwiazdkowe do oddania **13 grudnia**)

1. Załóżmy, że $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Niech $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$.
a) Znajdź wszystkie liczby a takie, że $(a^n \cos(S_n), \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.
b) Wykaż, że dla dowolnego $\lambda > 0$, ciąg $(\exp(\lambda S_n - n\lambda^2/2), \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{E}|X_i| < \infty$ dla wszystkich i. Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez X_n wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{E}X_i = 1$ dla wszystkich $i \geqslant 2$ lub $X_1 = 0$ p.n..

3. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0. Wykaż, że ciąg Z_n dany wzorem $Z_0 = 0$, $Z_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \ldots + X_{n-1} X_n$, $n \geqslant 1$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

4. Niech $t \in \mathbb{R}$ oraz $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$. Przyjmijmy $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź wszystkie ciągi (a_n) takie, że $(e^{itS_n + a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

5* Niech $(M_k)_{k=1}^n$ będzie martyngałem względem pewnej filtracji, a $p > 1$ spełnia $\mathbf{E}|M_1|^p < \infty$. Wykaż, że $\mathbf{E}|M_1|^p \leqslant \mathbf{E}|M_n|^p$ oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $M_1 = M_2 = \ldots = M_n$ p.n..

6* Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym oraz $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Udowodnij, że $X_n = Y_n + Z_n$, gdzie Y_n jest martyngałem, a Z_n ciągiem prognozowalnym (tzn. każde Z_n jest $\mathcal{F}_{n-1}$-mierzalne). Wykaż, że X_n jest nadmartyngałem wtedy i tylko wtedy gdy Z_n jest nierosnący.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 9
(zadania gwiazdkowe do oddania 13 grudnia)

1. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1)$. Przyjmując $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ znajdź wszystkie liczby rzeczywiste λ dla których λ^{S_n} jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n).

2. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą niesymetryczną.

3. Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

4. Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygranie 1 zł przez A w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną?

5. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

6. Egzaminator przygotował na egzamin 20 zestawów pytań. Każdy z 15 zdających studentów losuje 1 zestaw, który później nie jest już używany. Student Abacki zna odpowiedź na dokładnie 10 z 20 zestawów. Od wychodzących z egzaminu dowiaduje się jakie pytania są już wylosowane. Jaka jest optymalna strategia (wybór momentu wejścia na egzamin) maksymalizująca szanse zdania egzaminu przez Abackiego?

7. Podaj przykład martyngału X_n takiego, że $X_n \to 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}|X_n| \to \infty$.

8* Czy ze zbieżności martyngału $(M_n)_{n\geqslant 1}$ według prawdopodobieństwa wynika zbieżność prawie na pewno?

9* Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=-\infty}^{0}$ będzie martyngałem (z tzw. czasem odwróconym). Udowodnij, że granica $X = \lim_{n\to-\infty} X_n$ istnieje. Co można powiedzieć o X?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 10
(zadania gwiazdkowe do oddania 20 grudnia)

1. Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają jednakowy rozkład o skończonej wariancji. Udowodnij, że $\mathbf{E}(S_\tau - \tau \mathbf{E} X_1)^2 = \mathbf{E}\tau \mathrm{Var}(X_1)$, o ile $\mathbf{E}\tau < \infty$. Czy wzór musi być prawdziwy gdy $\mathbf{E}\tau = \infty$?

2* Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ zachodzi
$$\mathbf{E}\sup_n |X_n| \leqslant C(1 + \sup_n \mathbf{E}|X_n| \ln^+ |X_n|).$$

3. Niech $(\varepsilon_n)_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych o wartościach ± 1. Wykaż, że nadmartyngał
$$Z_n := e^{a(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) - (na^2/2)}$$
jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w L_1?

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Wykaż, że
$$M_n = \prod_{k=1}^n X_k$$
tworzą martyngał (względem filtracji generowanej przez X_n) zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w L_1 .

5. Wykaż, że jeśli (X_i) i (Y_i) są jednostajnie całkowalne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $(aX_i + bY_i)$ jest jednostajnie całkowalny.

6. Znajdź jednostajnie całkowalny ciąg X_n taki, że $\mathbf{E}\sup_n |X_n| = \infty$.

7. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunek $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_i \mathbf{E}\varphi(|X_i|) < \infty$, to (X_i) jest jednostajnie całkowalny.

8. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^2. Wykaż, że ciąg $M_n = (n!)^{-2} X_1 \cdots X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n). Czy M_n jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^2? Czy jest zbieżny w L^1?

9* Niech Y_n będzie niezależnym ciągiem nieujemnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takich, że $\mathbf{E}Y_1 = 1$ i $\mathbf{P}(Y_1 = 1) < 1$. Wykaż, że $(Y_1 Y_2 \cdots Y_n, \sigma(Y_1, \ldots, Y_n))_{n\geqslant 1}$ jest martyngałem zbieżnym p.n., ale nie w L^1.

10* Czy istnieje jednostajnie całkowalny martyngał $(M_n)_{n\geqslant 0}$ taki, że $\mathbf{E}\sup |M_n| = \infty$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 11
(zadanie gwiazdkowe do oddania 10 stycznia)

1. Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Rozstrzygnij, które z podanych poniżej procesów są łancuchami Markowa.
a) $X_0 = 0$, $X_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$
b) $Y_0 = 1$, $Y_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$, , $n = 1, 2, \ldots$
c) $Z_n = (-1)^{X_n}$, , $n = 1, 2, \ldots$
d) $W_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$
e) $V_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$, $n = 1, 2 \ldots$.

2. Załóżmy, że E jest zbiorem przeliczalnym, $f\colon E \times \mathbb{R} \to E$ jest funkcją mierzalną (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne), Y_0 pewną zmienną o wartościach w E, zaś $X_0, X_1, \ldots$ ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Definiujemy
$$Y_{n+1} = f(X_n, Y_n) \text{ dla } n = 0, 1, \ldots.$$
Wykaż, że (Y_n) jest łańcuchem Markowa.

3. Dwa jednorodne łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia P są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

4. (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w E. Wykaż, że dla dowolnej funkcji różnowartościowej $f : E \to E$, $(f(X_n))$ jest łańcuchem Markowa. Czy tak być musi, jeśli nie założymy różnowartościowości f?

5* Zmienne $X_0, X_1, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1) = p \in (0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $M_n = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Które z ciągów $|S_n|$, M_n, $M_n - S_n$ są łańcuchami Markowa? Znajdź odpowiednie macierze przejścia.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 12
(zadanie gwiazdkowe do oddania 17 stycznia)

1. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 0}$ o wartościach w przestrzeni przeliczalnej E jest łańcuchem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $\Gamma \subset E$ i dowolnego $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in \Gamma | X_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} \in \Gamma | X_0, X_1, \ldots, X_n).$$

Przedstaw powyższe proawdopodobieństwo warunkowe za pomocą macierzy przejścia łańcucha (X_n).

2* Wykaż, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 0}$ o wartościach w przestrzeni przeliczalnej E jest łańcuchem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $n \geqslant 1$ oraz zbioru $A \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ zachodzi

$$\mathbf{P}(A|X_n) = \mathbf{P}(A|X_0, X_1, \ldots, X_n).$$

3. Dla łańcuchów Markowa o przestrzeni stanów $\{1, 2, 3, 4\}$ i poniższych macierzach przejścia znajdź wszystkie stany nieistotne i wszystkie zamknięte zbiory stanów.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Udowodnij, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma właściwych podzbiorów zamkniętych.

5. Zmienne $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$. Ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest określony następująco: $X_0 \equiv 1$ p.n., a dla $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } Y_n = 1, \\ X_n Y_n & \text{jeśli } Y_n \neq 1. \end{cases}$$

Wykaż, że $(X_n)_n$ jest nieprzywiedlnym, powracalnym łańcuchem Markowa.

6. Wykaż, że skończony łańcuch Markowa ma przynajmniej jeden stan powracający.

7. Wykaż, że jeśli y jest stanem chwilowym to $\sum_{n=0}^{\infty} p_{x,y}(n) < \infty$ dla wszystkich x, w szczególności $\lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = 0$.

8. Wykaż, że w powracalnym i nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa z prawdopodobieństwem 1 każdy stan jest odwiedzany nieskończenie wiele razy (niezależnie od rozkładu początkowego).

9* Rozpatrzmy błądzenie w $\mathbb{Z}^k$ z macierzą przejścia

$$p_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{2k} & \text{jeśli } \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| = 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Dla jakich k jest to błądzenie powracalne?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 13
(zadanie gwiazdkowe do oddania 24 stycznia)

1* Stan x łańcucha Markowa x nazywamy niezerowym, jeśli średni czas powrotu do x jest skończony, zaś zerowym w przeciwnym przypadu. Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracalnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są niezerowe lub wszystkie są zerowe.

2* Wykaż, że w nieprzywiedlnym powracającym łańcuchu Markowa stan y jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} p_{xy}(n) = 0$ dla wszystkich stanów x.

3. Zbadaj okresowość łańcuchów o poniższych macierzach przejścia:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Niech (X_n) będzie nieprzywiedlnym okresowym łańcuchem Markowa na E z macierzą przejścia P i okresem $d > 1$. Udowodnij, że istnieje rozkład $E = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_d$ taki, że zbiory S_i spełniają warunki:
a) $p_{xy} > 0 \Rightarrow x \in S_i, y \in S_{i+1}$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, d$ (przyjmujemy $S_{d+1} = S_1$).
b) na każdym S_i macierz $(p_{xy}(d))_{x,y\in S_i}$ definiuje nieprzywiedlny, nieokresowy łańcuch Markowa.

5. Jednorodny łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $\{0, 1, 2 \ldots\}$ ma macierz przejścia $(p_{n,m})_{n,m\geqslant 0}$ taką, że $p_{0,1} = 1$, $p_{n,n+1} = 1 - p_{n,n-1} = p$ dla $n = 1, 2 \ldots$, gdzie $p \in (0, 1)$. W zależności do parametru p wyznacz wszystkie rozkłady stacjonarne.

6. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.

7. Ciąg niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots$ ma wspólny rozkład taki, że $\mathbf{P}(Y_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(Y_i = -1) = p$. Definiujemy rekurencyjnie ciąg X_n wzorami $X_0 = 1$, $X_{n+1} = \max(X_n, 1) + Y_n$. Wykaż, że ciąg ten jest łańcuchem Markowa. Znajdź rozkład stacjonarny, o ile istnieje.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 14

1. W powiecie N. syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem 3/4, a syn niepiekarza z prawdopodobieństwem 1/100. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? A potomek w n-tym pokoleniu? Jaki procent ludzi w N. stanowią piekarze?

2. Załóżmy, że $(X_n)_{n\geqslant 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markow o wartościach w przestrzeni E z macierzą przejścia $(p_{x,y})_{x,y\in E}$, zaś F jest niepustym podzbiorem E. Niech $p_F(x)$ oznacza prawdopodobieństwo, a $m_F(x)$ średni czas dojścia z punktu x do zbioru E. Wykaż, że spełnione są układy równań

$$\begin{cases} p_F(x) = 1 & \text{dla } x \in F, \\ p_F(x) = \sum_{y\in E} p_{xy} p_F(y) & \text{dla } x \notin F, \\ p_F(x) = 0 & \text{jeśli } \forall_n \forall_{y\in F}\ p_{xy}(n) = 0 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} m_F(x) = 0 & \text{dla } x \in F, \\ m_F(x) = 1 + \sum_{y\in E} p_{xy} m_F(y) & \text{dla } x \notin F, \\ m_F(x) = \infty & \text{jeśli } p_F(x) < 1 \end{cases}$$

3. Wykaż, że jeśli przestrzeń stanów jest skończona, to układy równań z poprzedniego zadania mają dokładnie jedno rozwiązanie

4. Po wierzchołkach sześcianu porusza się w sposób losowy mucha – w każdym kroku z prawdopodobieństwem 1/3 przenosi się do jednego z sąsiednich wierzchołków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że mucha powróci do punktu wyjścia nie odwiedzając wcześniej przeciwległego wierzchołka oraz średnią liczbę kroków jakie zajmie jej powrót do punktu wyjścia.

5. Macierz przejścia łańcucha Markowa $(X_n)_n$ na przestrzeni $S = \{1, 2, 3, 4\}$ dana jest następująco:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Czy jest to łańcuch nieprzywiedlny?
b) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. oblicz prawdopodobieństwo tego, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.
c) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. oblicz wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.