**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 12**

1. Udowodnij, że dla dowolnych punktów $x_n, x$ w przestrzeni metrycznej $E$ $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy gdy $x_n \to x$.

2. Wykaż, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda$, gdzie $\lambda$ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$.

3. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow c$ gdzie $c$ jest stałą to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.

4. Zmienne losowe $X_n, X$ przyjmują tylko wartości całkowite. Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X_n = k) \to P(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych $k$.

5. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

6. Niech $g_{X_n}, g_X$ będą gęstościami rzeczywistych zmiennych losowych. Wykaż, że jeśli $g_{X_n}(t) \to g_X(t)$ dla p.w. $t$ to $X_n \Rightarrow X$.

7. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n E|X_n|^p < \infty$ to $E|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $E|X_n|^p \to E|X|^p$. Jest to jednak prawdą gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n E|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

8. Niech $x \in (0,1)$ będzie liczbą niewymierną. Wykaż,że

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\{kx \mathrm{mod} 1\}} \Rightarrow \lambda,$$

gdzie $\lambda$ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$. Co się dzieje, gdy $x$ jest wymierne?

9. a) Wykazać, że dla rzeczywistych zmiennych losowych $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedu gdy istnieją zmienne losowe $\tilde{X}_n \sim X_n$ i $\tilde{X} \sim X$ takie, że $X_n$ jest zbieżny do $X$ według prawdopodobieństwa.
b) Udowodnij powyższe stwierdzenie gdy $X_n, X$ mają wartości w dowolnej przestrzeni metrycznej $(E, \rho)$.

10. Udowodnij, że jeśli dla wszystkich $n$, $X_n$ jest niezależne od $Y_n$, $X$ niezależne od $Y$ oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$ to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

11. Wykaż, że

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon : \ \forall_t \ F_\mu(t - \varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t + \varepsilon) + \varepsilon\}$$

definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilstycznych na $R$ zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu \Leftrightarrow d(\mu_n, \mu) \to 0$).

12. Zmienne losowe $X_n$ są niezależne. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 13**

1. Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz dystrybuanta $F_X$ jest ciągła to $F_{X_n}$ zbiega jednostajnie do $F_X$.

2. Niech $X_n$ będzie pierwszą współrzędną rozkładu jednostajnego na kuli jednostkowej w $R^n$. Udowodnij, że $\sqrt{n} X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

3. Wykaż, że rodzina zmiennych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha| < \infty, \sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

4. Udowodnij, że twierdzenie Prochorowa zachodzi na przestrzeni polskiej tzn. metrycznej, zupełnej, ośrodkowej.

5. Oblicz funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów tzn.
   a) geometrycznego z parametrem $p$
   b) Poissona z parametrem $\lambda$
   c) dwumianowego z parametrami $n, p$
   d) jednostajnego na przedziale $[a, b]$
   e) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$
   f) eksponencjalnego z parametrem $\lambda$
   g) Cauchy'ego z parametrem $h$.

6. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

7. Udowodnij, że jeśli $\varphi_X''(0)$ istnieje to $EX^2 < \infty$

8. Wykaż, że dla zmiennych $X$ przyjmujących tylko wartości całkowite zachodzi
$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt.$$

9. Udowodnij, że jeśli $X$ ma rozkład ciągły z gęstością $g$ to $\varphi_X(t) \to \infty$ dla $|t| \to \infty$.

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 14**

1. Funkcja $\varphi$ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcje a)$\varphi^2$, b) Re$\varphi$, c) $|\varphi|^2$, d) $|\varphi|$ muszą być funkcjami charakterystycznymi?

2. Udowodnij, że zmienna losowa $X$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi_X(t) \in R$ dla wszystkich $t$.

3. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego?

4. Udowodnij, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ to zmienna $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.

5. Znajdź zmienne losowe $X, Y$ takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$ oraz zmienne $X, Y$ są zależne.

6. a) Udowodnij, że $\varphi(x) = (1 - |x|)I_{(-1,1)}(x)$ jest funkcją charakterystyczną
   b) Udowodnij, że jeśli $\varphi : R \to R$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$, kawałkami liniowa oraz $\varphi(0) = 1$ to $\varphi$ jest funkcją charakterystyczną.
   c)Udowodnij, że jeśli $\varphi : R \to R$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$ to $\varphi$ jest funkcją charakterystyczną.

7. Wykaż, że funkcja $e^{-|t|^\alpha}$
   a) jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leq 1$
   b) nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$
   c) jest funkcją charakterystyczną dla $1 < \alpha \leq 2$.

8. Zmienna $X$ ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in R$, a $Y$ jest niezależną kopią $X$.

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 15**

1. Udowodnij, że układ trójkątny $X_{n,k} = \frac{X_k}{\sqrt{n}}$, $k = 1, \ldots, n$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnym zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie spełnia warunek Lindeberga.

2. Rzucamy 1000 razy kostką. Oszacuj prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie między 3400 a 3600.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnym zmiennymi losowymi takimi, że
$$P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Udowodnuj, że $V(X_n) \to 2$ oraz
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu.}$$

4. Wykaż, że warunek Lyapunowa
$$\exists_{\delta>0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\le k_n} E|X_{n,k} - EX_{n,k}|^{2+\delta} = 0$$
implikuje warunek Lindeberga (zakładamy, że $s_n^2 \to \sigma^2$).

5. Zmienne $X_\lambda$ mają rozkład Poissona z parametrem $\lambda$. Wykaż, że
$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\lambda} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu gdy } \lambda \to \infty.$$

6. Udowodnij, że
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k\le n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $P(X_i = a) = P(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

8. Dana jest zmienna losowa $X$ taka, że $EX^2 < \infty$ oraz $X \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + Z)$, gdzie $Y, Z$ są niezależnymi kopiami $X$. Wykaż, że $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dla pewnego $\sigma \ge 0$.

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 16**

1. Podaj przykład zależnych zmiennych losowych $X, Y$ o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ takich, że $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

2. Udowodnij, że zmienna $X \sim \mathcal{N}(a,B)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy gdy $B$ jest odwracalne oraz, że w tym ostatnim przypadku wynosi ona

$$g_X(x) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{d/2}} e^{\frac{(C(x-a),x-a)}{2}}, \text{ gdzie } C = B^{-1}.$$

3. Załóżmy, że zmienne $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n})$ mają rozkład jednostajny na kuli $B(0,\sqrt{n})$ o środku w 0 i promieniu $\sqrt{n}$. Wykaż, że dla każdego $k$, zmienne $(X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,k})$ zbiegają według rozkładu do $\mathcal{N}(0, Id_k)$.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $EX_i = 0$, $EX_i^2 = 1$ oraz

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\imath \le [nt]} X_i \text{ dla } t \ge 0, n = 1, 2, \ldots .$$

Udowodnij, że dla dowolnych $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ ciąg wektorów losowych $(S_n(t_1), S_n(t_2), \ldots, S_n(t_k))$ jest zbieżny według rozkładu. Jak wygląda rozkład graniczny?

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 17**

1. Zmienne $\tau$ i $\sigma$ są momentami zatrzymania. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $\tau - 1$, $\tau + 1$ też są momentami zatrzymania (przyjąć $T = N$)?

2. Zmienne losowe $(X_n)$ są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego $B$
a) $\tau_1 = \inf\{n : X_n \in B\}$ - pierwsza wizyta w zbiorze $B$
b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ - k-ta wizyta w zbiorze $B$.

3. Wykaż, że jeśli $\tau, \sigma$ są momentami zatrzymania $(T = N)$ to
a) jeśli $\tau \equiv t$ to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$
b) jeśli $\tau < \sigma$ to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$
c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t$.

4. Zmienne $\tau$ i $\sigma$ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leq \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmienymi losowymi takimi, że $P(X_i = \pm 1) = 1/2$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Wykaż, że $E\tau = \infty$.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $E|X_i| < \infty$ dla wszystkich $i$. Udowodnij, że $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy $EX_i = 1$ dla wszystkich $i$ lub $X_1 = 0$ p.n.p.

7. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $EX_i^2 < \infty$. Znajdź liczby $a_n, b_n$ dla których $S_n^2 + a_n S_n + b_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$.

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Dla $\lambda > 0$ znajdź liczby $a_n$ takie, że $(e^{\lambda S_n - a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 18**

1. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że jest on martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania $\tau$, $EX_\tau = EX_0$.

2. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie adaptowalnym ciągiem całkowalnym. Udowodnij, że $X_n = Y_n + Z_n$, gdzie $Y_n$ jest martyngałem, a $Z_n$ ciągiem prognozowalnym. Wykaż, że $X_n$ jest nadmartyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $Z_n$ jest niemalejący.

3. Egzaminator przygotował na egzamin 20 zestawów pytań. Każdy z 15 zdających studentów losuje 1 zestaw, który później nie jest już używany. Student S zna odpowiedź na dokładnie 10 z 20 zestawów. Od wychodzących z egzaminu dowiaduje się jakie pytania są już wylosowane. Jaka jest optymalna strategia (wybór momentu wejścia na egzamin) maksymalizująca szanse zdania egzaminu przez S?

4. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie takim, że $EX_i^2 < \infty$. Udowodnij, że $E(S_\tau - \tau EX_1)^2 = E\tau V(X_1)$.

5. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś $t$ liczbą rzeczywistą taką, że $\varphi_{X_n}(t) \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że

$$\frac{e^{itS_n}}{\prod_{j \leq n} \varphi_{X_j}(t)}, \text{ gdzie } S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $(X_n)$. Wywnioskuj stąd, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zbiega według rozkładu wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny p.n.p.

6. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania (przy skończonym kapitale obu graczy) w grze orła i reszkę monetą niesymetryczną.

7. Oblicz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

8. Gracz A dysponuje nieskończonym kapitałem. Ile wynosi średni czas oczekiwania na wygranie 1 zł. przez A w grze orła i reszkę
a) monetą symetryczną
b) monetę niesymetryczną.

9. Podaj przykład martyngału $X_n$ takiego, że $X_n \to 0$ p.n.p. oraz $E|X_n| \to \infty$.

10. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=-\infty}^{0}$ będzie martyngałem (z tzw. czasem odwróconym). Udowodnij, że granica $X = \lim_{n \to -\infty} X_n$ istnieje. Co można powiedzieć o $X$?

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 19**

1. Podaj przykład martyngału takiego, że $\sup_n E|X_n| < \infty$, który nie jest zbieżny w $L^1$.

2. Udowodnij, że dla podmartyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$

$$\forall_{t>0} P(\max_{1\le k\le n} |X_k| > t) \le 3\frac{\max_{1\le k\le n} E|X_k|}{t}$$

oraz w przypadku $X_n \ge 0$ lub $X_n \le 0$ dla wszystkich $n$, stałą 3 można zamienić na 1.

3. Wyprowadź z poprzedniego zadania nierówność Kołmogorowa

$$P(\max_{1\le k\le n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| > t) \le \frac{1}{t^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2$$

dla niezależnych zmiennych losowych $X_i$ takich, że $EX_i = 0$.

4. Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ zachodzi

$$E\sup_n |X_n| \le C(1 + \sup_n E|X_n| \ln^+ |X_n|).$$

5. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe $X_n$ są zbieżne w $L^p$, $p \ge 1$ to $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowalny (zatem $X_n \to X$ w $L^p$ wtedy i tylko wtedy gdy $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa oraz $|X_n|^p$ jest jednostajnie całkowalny).

6. Wykaż, że jeśli $X_t$ i $Y_t$ są jednostajnie całkowalne to dla dowolnych $a, b \in R$, $aX_t + bY_t$ jest jednostajnie całkowalny.

7. Znajdź jednostajnie całkowalny ciąg $X_n$ taki, że $E\sup_n |X_n| = \infty$.

8. Niech $\varphi : R_+ \to R_+$ spełnia warunek $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykaż, że jeśli $\sup_t E\varphi(|X_t|) < \infty$ to $(X_t)$ jest jednostajnie całkowalny.

9. Dany jest ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie taki, że $E|X_i| < \infty$, niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$.
a) Udowodnij, że $(\frac{S_n}{n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem z czasem odwróconym.
b) Wywnioskuj stą silne prawo wielkich liczb Kołmogorowa $\frac{S_n}{n} \to EX_i$ p.w. i w $L^1$.

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 20**

1. Dany jest zbiór przeliczalny $E$ i funkcje borelowskie $\varphi_n : E \times R \to R$, $n = 1, 2, \ldots$ (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory $E$ są mierzalne). Zmienne losowe $X_0$ o wartościach w $E$ i $U_1, U_2, \ldots$ o wartościach rzeczywistych są niezależne. Udowodnij, że ciąg $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $X_{n+1} = \varphi_n(X_n, U_n)$ jest łańcuchem Markowa.

2. Dwa łańcuchy Markowa $(X_n), (Y_n)$ z macierzą przejścia $P$ są niezależne. Udowodnij, że $Z_n = (X_n, Y_n)$ też jest łańcuchem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

3. Zmienne $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ są niezależne oraz $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Czy ciągi $X_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $Y_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ są łańcuchami Markowa?

4. $(X_n)$ jest łańcuchem Markowa o wartościach w $E$. Czy dla dowolnej funkcji $f : E \to E$, $(f(X_n))$ musi być łańcuchem Markowa?

5. Zmienne $X_0, X_1, \ldots$ są niezależne oraz $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1) = p \in (0, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $M_n = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Które z ciągów $|S_n|, M_n, M_n - S_n$ są łańcuchami Markowa? Znajdź odpowiednie macierze przejścia.

6. Udowodnij, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma właściwych podzbiorów zamkniętych.

7. Wykaż, że skończony łańcuch Markowa ma przynajmniej jeden stan powracający.

8. Rozpatrzmy błądzenie w $Z^k$ z macierzą przejścia $p_{x,y} = \frac{1}{2k}$ gdy $\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| = 1$ oraz $p_{x,y} = 0$ dla pozostałych $x, y$. Dla jakich $k$ jest to błądzenie powracalne?

9. Wykaż, że jeśli $y$ jest stanem chwilowym to $\sum_{n=0}^{\infty} p_{x,y}(n) < \infty$ dla wszystkich $x$, w szczególności $\lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = 0$.

10. Udowodnij, że łańcuch Markowa jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy $F_{x,y} = 1$ dla wszystkich $x, y$.

11. Dane są dwa niezależne błązenia symetryczne $X_n, Y_n$ na prostej (lub ogólniej w $Z^k$). Czy $P(\exists n \geq 1\ X_n = Y_n) = 1$ tzn. czy z prawdopodobieństwem 1 błądzenia się kiedyś przetną?

12. Prawopodobieństwo, że bakteria ma $n$ potomków wynosi $p_n$ dla $n = 0, 1, \ldots$. Zakładając, że bakterie w ntym pokoleniu rozmnażają się równocześnie i niezależnie udowodnij, że populacja bakterii (licząca w chwili 0, $N > 0$ bakterii) nigdy nie wyginie z prawdopodobieństwem dodatnim wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k=0}^{\infty} kp_k > 1$.

**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 21**

1. Niech $(X_n)$ będzie nieprzywiedlnym okresowym łańcuchem Markowa na E z macierzą przejścia $P$ i okresem $d > 1$. Udowodnij, że istnieje rozkład $E = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_d$ taki, że zbiory $S_i$ spełniają warunki:
a) $p_{xy} > 0 \Leftrightarrow x \in S_i, y \in S_{i+1}$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, d$ (przyjmujemy $S_{d+1} = S_1$).
b) na każdym $S_i$ macierz $(p_{xy}(d))_{x,y \in S_i}$ definiuje nieprzywiedlny, nieokresowy łańcuch Markowa.

2. W dwu urnach znajduje się łącznie n kul. W każdej chwili wybieramy losowo kulę i przenosimy ją do innej urny. Znajdź rozkład stacjonarny liczby kul w pierwszej urnie.

3. Ciąg niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots$ ma wspólny rozkład taki, że $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = -1) = p$. Definiujemy rekurencyjnie ciąg $X_n$ wzorami $X_0 = 1$, $X_{n+1} = \max(X_n, 1) + Y_n$. Wykaż, że ciąg ten jest łańcuchem Markowa. Znajdź rozkład stacjonarny o ile istnieje.

4. Wykaż, że w powracalnym i nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa każdy stan jest odwiedzany nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1.

5. W powiecie N. syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem 3/4, a syn niepiekarza z prawdopodobieństwem 1/100. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? A potomek w n-tym pokoleniu? Jaki procent ludzi w N. jest piekarzem?

6. Udowodnij twierdzenie o istnieniu rozkładu stacjonarnego dla łańcuchów z przeliczalną przestrzenią stanów bez używania twierdzenia Brouwera.

## Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 22

1. Udowodnij, że dla łańcuchów Markowa ze skończoną przestrzenią stanów $E$ i dowolnego niepustego podzbioru $F \subset E$ układy równań

$$\begin{cases} p_F(x) = 1 & \text{dla } x \in F \\ p_F(x) = \sum_{y \in E} p_{xy} p_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ p_F(x) = 0 & \text{jeśli } \forall_n \forall_{y \in F}\ p_{xy}(n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_F(x) = 0 & \text{dla } x \in F \\ m_F(x) = 1 + \sum_{y \in E} p_{xy} m_F(y) & \text{dla } x \notin F \\ m_F(x) = \infty & \text{jeśli } p_F(x) < 1 \end{cases}$$

mają dokładnie jedno rozwiązanie

2. Po wierzchołkach sześcianu porusza się w sposób losowy mucha - w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1/3$ przenosi się do jednego z sąsiednich wierzchołków. Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha powróci do punktu wyjścia nie odwiedzając wcześniej przeciwległego wierzchołka oraz średnią liczbę kroków jakie zajmie jej powrót do punktu wyjścia

W zadaniach 3–6 $W = (W_t)_{t \in [0,\infty)}$ jest procesem Wienera

3. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
b) $Y_t = c^{-1/2} X_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
c) $Z_t = t X_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
d) $U_t = X_{T+t} - X_T, T \geq 0$
e) $V_t = X_t$ dla $t \leq T$, $V_t = 2X_T - X - t$ dla $t > T$, gdzie $T \geq 0$.

4. Udowodnij, że $W_t$ i $W_t^2 - t$ są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t)$, $t \geq 0$.

5. Udowodnij, że $\lim_{t \to \infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.p.

6. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę $\pi_n$. Udowodnij, że

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n.p., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

7. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.