Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
   b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.

2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?

3. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi
   i) przynajmniej jeden chłopiec,
   ii) więcej chłopców niż dziewczynek.

4. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
   i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
   ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?

5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
   a) wszystkie karty różnej wartości;
   b) dokładnie dwa piki;
   c) co najmniej dwa piki;
   d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
   e) układ 4432;
   f) układ 4441.

6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
   a) parę
   b) dwie pary
   c) straighta
   d) trójkę
   e) fulla
   f) karetę
   g) kolor
   h) pokera.

7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
   a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
   b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
   c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.

9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
   b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?

10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

11. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leqslant n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
    a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
    b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.

12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?
    b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 2

1. Z przedziału $[0,1]$ wybrano w sposób losowy dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

2. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.

3. Odcinek PQ jest średnicą okręgu. Na okręgu wybieramy na chybił trafił dwa punkty A i B. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jeden z łuków AB zawiera oba punkty P i Q?

4. Na nieskończoną szachownicę o boku 1 rzucono monetę o średnicy $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta
   a) znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól,
   b) przetnie się z dwoma bokami szachownicy?

5. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

6. Załóżmy, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C)$. Wykaż, że $1/6 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1/4$.

7. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(B) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ i $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$.

8. Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ zachodzą nierówności
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \geqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

9. Wyznacz σ ciało generowane przez
   a) dwa zbiory A i B;
   b) trzy zbiory A, B i C.

10. Czy istnieje σ-ciało złożone z 7-elementów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 3

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) Jacek stoi bezpośrednio przed Agatką, jeśli Agatka stoi bezpośrednio przed Dorotką;
b) Jacek stoi przed Agatką, jeśli Agatka stoi przed Dorotką;
c) Jacek stoi przed Agatką, jeśli wiemy, że Agatka nie stoi ostatnia.

2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
a) mamy co najmniej jednego asa;
b) mamy co najmniej jednego asa czarnego koloru;
c) mamy asa pik;
d) pierwszą wylosowaną kartą jest as;
e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as;
f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

3. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
a) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$;
b) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż $1/4$;
c) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż $1/4$.

4. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny po jednej kuli a następnie zwracamy ją do urny dokładając a kul tego samego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) pierwsza i druga wylosowana kula będzie biała;
b) druga wylosowana kula będzie biała;
c) za pierwszym razem wylosowano kulę białą, jeśli wiemy, że za drugim razem wylosowano kulę białą;
d) w pierwszych trzech losowaniach wylosujemy kule tego samego koloru.

5. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?

6. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej

niż 5 błędów z prawdopodobieństwem 1/10. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?

7. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & \text{dla } n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & \text{dla } n = 0. \end{cases}$$

   Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma
   a) co najmniej jedną córkę;
   b) dokładnie jedną córkę?
   c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona jedynaczką?

8. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe - SP1 i SP2. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w SP1 potrafi rozwiązać układ równań niż w SP2 podobnie większy procent chłopców z SP1 potrafi to zrobić niż w SP2. Czy znaczy to, że ”statystyczne dziecko” ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozwiązywaniu układu równań od ”statystycznego dziecka” ze szkoły nr 2?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 4

1. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez trzy, B – za drugim razem wylosowano liczbę oczek podzielną przez trzy, C – suma wyrzuconych oczek jest parzysta. Czy zdarzenia A, B, C są parami niezależne? Czy są niezależne?

2. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k-tej kostce wypadła szóstka, $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \ldots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia $A_1, \ldots, A_{n+1}$ nie są niezależne.

3. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k-ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

4. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

5. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
   a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
   b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

6. Rzucamy kostką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.

7. Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków jest równe $5^k e^{-5}/k!$, $k = 1, 2, \ldots$. Prawdopodobieństwo tego, że w danym wypadku będzie uczestniczył samochód czerwony jest 1/3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków z udziałem samochodów czerwonych.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 5

1. Rzucono n symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba orłów jest podzielna przez k dla $k = 2, 4$.

2. Wykaż (używając metod probabilistycznych), że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n, m oraz $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q = 1$ zachodzi nierówność $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geqslant 1$.

3. Rzucamy nieskończenie wiele razy kostką. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 wystąpi nieskończenie wiele serii złożonych z 2017 szóstek pod rząd.

4. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.

5. Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł, gracz A płaci B 1 zł., a jeśli reszka, to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
   a) Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 gra się zakończy.
   b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.

6. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że jeśli $p \neq 1/2$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie skończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$.

7. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(A_n) < 1$ dla wszystkich n. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
   i) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n,
   ii) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

8. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
   a) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a < 1$,
   b) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 1$ przy $n \to \infty$ dla $a > 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 6

1. Na przestrzeni losowej $\Omega = [0,1]$ z prawdopodobieństwem geometrycznym określamy zmienne losowe. $X(t) = t(1-t)$, $Y(t) = I_{[0,1/2]}(t)$.
   i) Wykaż, że X i Y są zmiennymi losowymi
   ii) Wyznacz σ-ciała $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.
   iii) Czy zmienna Y jest $\sigma(X)$-mierzalna? Czy zmienna X jest $\sigma(Y)$-mierzalna?
   iv) Wyznacz dystrybunaty zmiennych X i Y.

2. a) Dla $t \in [0,1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a.
   b) Pokaż, że funkcje Rademachera $r_n(x) := \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi na pewnej przestrzeni probabilistycznej oraz $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$. Wykaż, że $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

4. Zmienna losowa X ma dystrybuantę
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leqslant t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leqslant t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geqslant \frac{3}{7}. \end{cases}$$
   Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leqslant X \leqslant \frac{3}{7})$.

5. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 2. \end{cases}$$
   Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

6. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X oznacza minimum, a Y maksimum z uzyskanych liczb oczek. Znajdź rozkłady zmiennych X i Y i sprawdź, że $7 - X$ ma ten sam rozkład co Y. Jak się zmieni odpowiedź, gdy będziemy rzucać 10 razy?

7. Na pewnym skrzyżowaniu zielone światło dla pieszych świeci się przez 30 sekund, a czerwone przez 2 minuty (nie ma światła żółtego). Pan Abacki przychodzi na skrzyżowanie w losowym momencie czasu.
   a) Znajdź dystrybuantę czasu oczekiwania przez pana Abackiego na zielone światło.
   b) Pan Abacki czeka już minutę na zielone światło. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie musiał czekać jeszcze ponad pół minuty?

8. Podaj przykład zmiennej o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuanta jest ściśle rosnąca.

9. Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie prawostronnie ciągłą, niemalejącą funkcją taką, że $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ oraz $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$. Wykaż, że F jest dystrybuntą pewnej zmiennej losowej.
   Wskazówka. Określmy $\Omega = (0,1)$ z prawdopodobieństwem geometrycznym, zaś zmienną losową X jako
   $$X(t) = \sup\{s\colon F(s) \leqslant t\}, \quad t \in (0,1).$$

10. Znajdź wszystkie zmienne losowe X o wartościach naturalnych, takie, że $\mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$ oraz $\mathbb{P}(X \geqslant n+m | X \geqslant n) = \mathbb{P}(X \geqslant m)$ dla wszystkich liczb naturalnych n, m.

11. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 I_{[0,5]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuantę zmiennej X.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 7

1. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1. Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).

2. Znajdź rozkład zmiennej $aX + b$ oraz e^{-X}, gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ.

3. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2, gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

4. Znajdź rozkład zmiennej $\min\{X^2, X^4\}$, gdy X ma rozkład jednostajny na przedziale $[-2, 8]$.

5. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).

6. Niech X będzie nieujemną „niestarzejącą się zmienną losową”, tzn.
$$\forall_{t,s>0}\ \mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$
(zakładamy, że $\mathbb{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t). Udowodnij, że X ma rozkład wykładniczy.

7. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

8. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

9. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 8

1. Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma rozkład z gęstością
$$g(x, y) = cxy1_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}.$$
i) Znajdź stałą c oraz rozkłady zmiennych X i Y.
ii) Znajdź rozkład zmiennej X/Y.

2. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kole o środku w $(0, 0)$ i promieniu 2.
i) Znajdź rozkłady zmiennych X i Y.
ii) Oblicz $\mathbb{P}(|X| + |Y| \leqslant 1)$.

3. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, przy czym X_i ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_i. Znajdź rozkład zmiennej $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

4. Wykaż, że zmienne $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładzie dyskretnym są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(X_1 = u_1, \ldots, X_n = u_n) = \mathbb{P}(X_1 = u_1)\mathbb{P}(X_2 = u_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = u_n)$ dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n$ takich, że $\mathbb{P}(X_i = u_i) > 0$ dla wszystkich i.

5. Wykaż, że zmienne rzeczywiste $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładzie ciągłym z gęstościami odpowiednio $g_1, \ldots, g_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma gęstość g_X daną wzorem $g_X(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)$.

6. Z talii 52 kartowej losujemy 5 razy ze zwracaniem po jednej karcie. Niech X oznacza liczbę wyciągniętych pików, Y - kierów, a Z - waletów. Czy zmienne X i Y są niezależne? Czy zmienne X i Z są niezależne?

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$.
i) Czy zmienne $X_1 + X_2$, X_1X_2 są niezależne?
ii) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_3, X_4 + X_5X_6$ są niezależne?
iii) Czy zmienne $X_1, X_1X_2, \ldots, X_1X_2 \cdots X_n$ są niezależne?

8. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r. Oblicz $\mathbb{P}(X < Y)$.

9. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrami λ i μ.

10. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X + Y, X - Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?

11. Niech $X_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant n_j, j = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, a f_j funkcjami mierzalnymi na $\mathbb{R}^{n_j}$. Czy zmienne $f_j(X_1^{(j)}, \ldots, X_{n_j}^{(j)})$, $j = 1, 2\ldots$ muszą być niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 9

1. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$ oraz $\mathbb{P}(X = -5) = \frac{1}{2}$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{X+1}$, $\mathbb{E}\sin(\pi X)$ i $\mathrm{Var}(X)$.

2. Oblicz $\mathbb{E}t^X$ dla $t \in \mathbb{R}$ i X o rozkładzie Poissona z parametrem λ (tzn. $\mathbb{P}(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$ dla $k = 0, 1, \ldots$).

3. Zmienna losowa X ma gęstość $g(x) = \frac{3}{8}x^2 I_{[0,2]}(x)$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{2+X}$ oraz $\mathrm{Var}(X^2)$.

4. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

5. Do klasy chodzi 20 uczniów. Nauczyciel na każdej lekcji pyta losowo wybranego ucznia. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby uczniów przepytanych w ciągu 15 lekcji.

6. Każdy bok i przekątną siedmiokąta pomalowano w sposób losowy na jeden z trzech kolorów (zakładamy, że kolory różnych odcinków są dobierane niezależnie i każdy z trzech dostępnych kolorów jest wybierany z jednakowym prawdopodobieństwem). Oblicz wartość oczekiwaną liczby jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach bedących wierzchołkami siedmiokąta.

7. Niech $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ oznacza losową permutację zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Niech N oznacza największą liczbę taką, że $\pi(k) > \pi(k-1)$ dla $k \leqslant N$. Oblicz $\mathbb{E}N$.

8. Kij o długości 1 złamano w losowym punkcie. Oblicz wartość oczekiwaną stosunku
   i) długości kawałka prawego do długości lewego,
   ii) długości kawałka krótszego do długości kawałka dłuższego.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 10

1. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję następujących rozkładów probabilistycznych:
   i) dwumianowego z parametrami n, p,
   ii) Poissona z parametrem λ,
   iii) geometrycznego z parametrem p,
   iv) jednostajnego na przedziale $[a, b]$,
   v) wykładniczego z parametrem λ,
   vi) Gamma z parametrami α, β,
   vii) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

2. Na pewnym skrzyżowaniu zielone światło świeci się przez 20 sekund, a czerwone przez 40 sekund. Na skrzyżowanie przychodzi w losowym momencie pan Abacki. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję czasu oczekiwania przez Abackiego na zielone światło.

3. Wektor (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $\{|x| + |y| \leqslant 1\}$. Oblicz wartość oczekiwaną, wariancję oraz kowariancję zmiennych X i Y. Czy są to zmienne niezależne?

4. Wektor (X, Y) mają rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(0, 2)$ i $(2, 0)$. Oblicz wartość oczekiwaną, wariancję, kowariancję i korelację zmiennych X i Y.

5. Mówimy, że zmienna losowa X jest *symetryczna*, jeśli zmienne X i $-X$ mają ten sam rozkład. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
   i) X jest symetryczna,
   ii) X ma ten sam rozkład, co εX, gdzie ε jest niezależne od X i $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$,
   iii) $\mathbb{E} f(X) = 0$ dla dowolnej nieparzystej, ograniczonej funkcji f.

6. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Oblicz $\mathrm{Var}(2X - 3Y)$ i $\mathrm{Cov}(5X + 2Y, X - 3Y)$.

7. Zmienna X ma standardowy rozkład normalny. Oblicz $\mathbb{E}X^k$, $\mathbb{E}|X|^k$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

8. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Oblicz $\mathbb{E}\exp(\lambda X)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Jak sie zmieni odpowiedź, gdy X ma rozkład $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$?

9. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/4$ oraz $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$. Znajdź medianę X oraz $|X|$.

10. Znajdź medianę rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 11

1. Wykaż, że mediana istnieje dla dowolnej zmiennej losowej, ale może nie być jednoznacznie zdefiniowana, nawet jeśli zmienna ma rozkład ciągły.

2. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład geometryczny z parametrami odpowiednio p i q. Znajdź rozkład $X+Y$ oraz $X-Y$.

3. Mówimy, że zmienna X ma rozkład Γ z parametrem $r>0$ (ozn. $X \sim \Gamma(r)$), jeśli X ma gęstość
$$g_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-x} I_{\{x \geqslant 0\}},$$
gdzie $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$.
a) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \Gamma(r_i)$, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \Gamma(r_1 + \ldots + r_n)$.
b) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz każda z nich ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \frac{1}{\lambda}\Gamma(n)$. (*Uwaga.* Rozkład $a\Gamma(r)$ w zależności od przyjętej konwencji się oznacza jako rozkład $\Gamma(r,a)$ lub $\Gamma(r, 1/a)$.)
c) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, to $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim 2\Gamma(n/2)$. (*Uwaga.* Rozkład ten występuje w wielu zastosowaniach statystycznych i się nazywa rozkładem *chi kwadrat o n stopniach swobody.*)

4. Zmienne X i Y są niezależne oraz mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$. Dla $s, t \in \mathbb{R}$ znajdź rozkład zmiennych $sX + tY$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

6. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

7. Zmienne losowe X i Y są ograniczone oraz $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$ dla wszystkich k. Udowodnij, że X i Y mają ten sam rozkład.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 12

1. Wykaż, że suma dwóch niezależnych zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny.

2. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_i ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a_i \sigma_i^2)$. Dla $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ wyznacz rozkład $t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_n X_n$.

3. Rzeczywista zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Udowodnij, że
$$\lim_{t \to \infty} t^p \mathbb{P}(|X| \geqslant t) = 0.$$

4. Niech $S = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$, gdzie (ε_i) są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E} e^{\lambda S} \leqslant \exp\Big(\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{i=1}^n a_i^2\Big).$$
i wywnioskuj stąd, że jeśli $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. to dla $t \geqslant 0$,
$$\mathbb{P}(|S| \geqslant t) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n a_i^2}\right).$$

5. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Oblicz $\mathbb{E}(\varepsilon_1 | \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ i $\mathbb{E}(\varepsilon_1 \varepsilon_2 | \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3)$.

6. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(n, p)$, Y ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(n, p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X + Y | X)$ oraz $\mathbb{E}(X | X + Y)$.

7. Rzucono kostką najpierw raz, a następnie tyle razy ile oczek wypadło w pierwszym rzucie. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek oraz liczby wyrzuconych trójek.

8. W urnie znajduje się a kul białych, b kul czarnych i c kul czerwonych, przy czym $a, b, c \geqslant 1$. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli z urny dopóki nie wylosujemy kuli czerwonej. Oblicz wartość oczekiwaną wylosowanych kul białych.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 13

1. Zmienne $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a X_i mają rozkład jednostajny na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
   a) Oblicz $\mathbb{E}(S_n|X_1)$, $\mathbb{E}(S_n^2|X_1)$.
   b) Dla $n \geqslant k$ wyznacz $\mathbb{E}(S_n|S_k)$, $\mathbb{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbb{E}(e^{-S_n}|S_k)$.

3. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

4. Załóżmy, że dodatnie zmienne X, Y przyjmują wartości całkowite oraz
$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \begin{cases} \frac{1}{l2^l} & \text{dla } 1 \leqslant k \leqslant l \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$
   Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$ i $\mathbb{E}(Y^X|Y)$.

5. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y)$. Niech f będzie funckją borelowską taką, że $\mathbb{E}|f(X, Y)| < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{E}(f(X, Y)|Y) = h(Y)$ p.n., gdzie
$$h(y) = \begin{cases} \frac{\int f(x,y)g(x,y)dx}{\int g(x,y)dx} & \text{jeśli } \int g(x, y)dx > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

6. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość
$$g(x, y) = \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} I_{x>0,y>0}.$$
   Wyznacz $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X^2)$ oraz $\mathbb{P}(Y > 1|X^3 + 1)$.

7. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X^3|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\max(X,Y)|\min(X,Y))$.

8. Dane jest σ-ciało $\mathcal{G}$ oraz zmienne losowe X i Y takie, że zmienna X jest mierzalna względem $\mathcal{G}$, a Y jest niezależna od $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji borelowskiej h takiej, że $\mathbb{E}|h(X, Y)| < \infty$,
$$\mathbb{E}(h(X, Y)|\mathcal{G}) = H(X) \ \text{ p.n.},$$
   gdzie $H(x) = \mathbb{E}h(x, Y)$.

9. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład jednostajny na $[0,1]$. Dla $s, t \in \mathbb{R}$ oblicz $\mathbb{E}(\sin(sX + tY)|X)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 14

1. Wykaż, że, jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ oraz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

2. Wykaż, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}\min(|X_n - X|, 1) \to 0$.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n}\max_{i\leqslant n}|X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

4. Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład taki, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, to
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{wg prawdopodobieństwa.}$$

5. Ciągi zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ oraz $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ są zbieżne według prawdopodobieństwa odpowiednio do X i Y. Udowodnij, że
i) ciąg $aX_n + bY_n$ jest zbieżny do $aX + bY$ według prawdododobieństwa dla $a, b \in \mathbb{R}$,
ii) ciąg X_nY_n jest zbieżny do XY według prawdododobieństwa.

6. Dana jest całkowalna zmienna losowa X. Określamy dla $n \geqslant 1$,
$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{dla } X(\omega) < -n \\ X(\omega) & \text{dla } |X(\omega)| \leqslant n \\ n & \text{dla } X(\omega) > n. \end{cases}$$
Czy ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^1?

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1X_2\cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..

8. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
i) według prawdopodobieństwa;
ii) prawie na pewno;
iii) w L^2 i $L^{3/2}$.

9. Liczby $p, q > 1$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q, to X_nY_n zbiega do XY w L^1.

10. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależnymi zmiennymi Rademachera, tzn. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varepsilon_n$ jest zbieżny p.n..

11. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, nieujemne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| = 0) < 1$. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$ p.n..