Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
   b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.

2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?

3. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
   i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
   ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?

4. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi więcej chłopców niż dziewczynek.

5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
   a) wszystkie karty różnej wartości;
   b) dokładnie dwa piki;
   c) co najmniej dwa piki;
   d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
   e) układ 4432;
   f) układ 4441.

6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
   a) parę
   b) dwie pary
   c) straighta
   d) trójkę
   e) fulla
   f) karetę
   g) kolor
   h) pokera.

7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
   a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
   b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
   c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.

9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
   b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?

10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

11. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leqslant n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
    a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
    b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.

12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?
    b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 2

1. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano w sposób losowy dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

2. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.

3. (Paradoks Bertranda) Z okręgu wybrano w sposób losowy cięciwę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ma ona długość większą od długości boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg.

4. Odcinek PQ jest średnicą okręgu. Na okręgu wybieramy na chybił trafił dwa punkty A i B. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jeden z łuków AB zawiera oba punkty P i Q?

5. Na nieskończoną szachownicę o boku 1 rzucono monetę o średnicy $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta
   a) znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól,
   b) przetnie się z dwoma bokami szachownicy?

6. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

7. Załóżmy, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C)$. Wykaż, że $1/6 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1/4$.

8. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(B) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ i $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$.

9. Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ zachodzą nierówności
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \geqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

10. Wyznacz σ ciało generowane przez
    a) dwa zbiory A i B;
    b) trzy zbiory A, B i C.

11. Czy istnieje σ-ciało złożone z 7-elementów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 3

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek stoi bezpośrednio przed Agatką, jeśli Agatka stoi bezpośrednio przed Dorotką;
   b) Jacek stoi przed Agatką, jeśli Agatka stoi przed Dorotką;
   c) Jacek stoi przed Agatką, jeśli wiemy, że Agatka nie stoi ostatnia.

2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
   a) mamy co najmniej jednego asa;
   b) mamy co najmniej jednego asa czarnego koloru;
   c) mamy asa pik;
   d) pierwszą wylosowaną kartą jest as;
   e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as;
   f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

3. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
   a) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$;
   b) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż $1/4$;
   c) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż $1/4$.

4. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny po jednej kuli a następnie zwracamy ją do urny dokładając a kul tego samego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) pierwsza i druga wylosowana kula będzie biała;
   b) druga wylosowana kula będzie biała;
   c) za pierwszym razem wylosowano kulę białą, jeśli wiemy, że za drugim razem wylosowano kulę białą;
   d) w pierwszych trzech losowaniach wylosujemy kule tego samego koloru.

5. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?

6. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej

niż 5 błędów z prawdopodobieństwem 1/10. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?

7. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & \text{dla } n = 1, 2, \ldots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & \text{dla } n = 0. \end{cases}$$

   Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma
   a) co najmniej jedną córkę;
   b) dokładnie jedną córkę?
   c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona jedynaczką?

8. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe - SP1 i SP2. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w SP1 potrafi rozwiązać układ równań niż w SP2 podobnie większy procent chłopców z SP1 potrafi to zrobić niż w SP2. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozwiązywaniu układu równań od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 4

1. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez trzy, B – za drugim razem wylosowano liczbę oczek podzielną przez trzy, C – suma wyrzuconych oczek jest parzysta. Czy zdarzenia A, B, C są parami niezależne? Czy są niezależne?

2. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k-ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

3. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k-tej kostce wypadła szóstka, $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \ldots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia $A_1, \ldots, A_{n+1}$ nie są niezależne.

4. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

5. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
   a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
   b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

6. Rzucamy kostką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.

7. Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków jest równe $5^k e^{-5}/k!$, $k = 1, 2, \ldots$. Prawdopodobieństwo tego, że w danym wypadku będzie uczestniczył samochód czerwony jest $1/3$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków z udziałem samochodów czerwonych.

8. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
   a) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a < 1$,
   b) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 1$ przy $n \to \infty$ dla $a > 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 5

1. Rzucamy nieskończenie wiele razy kostką. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 wystąpi nieskończenie wiele serii złożonych z 2017 szóstek pod rząd.

2. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że
i) jeśli $p \neq 1/2$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie skończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$
ii*) jeśli $p = 1/2$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$

3. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(A_n) < 1$ dla wszystkich n. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n,
ii) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

4. Jaś i Małgosia raz w tygodniu grają w tenisa. Prawdopodobieństwo, że w pojedynczym meczu zwycięży Małgosia jest równe $p \in (0, 1)$. Niech X oznacza numer meczu w którym Małgosia wygrała z Jasiem po raz k-ty. Znajdź rozkład X.

5. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X oznacza minimum, a Y maksimum z uzyskanych liczb oczek. Znajdź rozkłady zmiennych X i Y i sprawdź, że $7-X$ ma ten sam rozkład co Y. Jak się zmieni odpowiedź, gdy będziemy rzucać 10 razy?

6. Na przestrzeni losowej $\Omega = [0, 1]$ z prawdopodobieństwem geometrycznym określamy zmienne losowe. $X(t) = t(1-t)$, $Y(t) = \mathbb{1}_{[0,1/2]}(t)$.
i) Wykaż, że X i Y są zmiennymi losowymi
ii) Wyznacz σ-ciała $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.
iii) Czy zmienna Y jest $\sigma(X)$-mierzalna? Czy zmienna X jest $\sigma(Y)$-mierzalna?
iv) Wyznacz dystrybunaty zmiennych X i Y.

7. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi na pewnej przestrzeni probabilistycznej oraz $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$. Wykaż, że $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

8. Na pewnym skrzyżowaniu zielone światło dla pieszych świeci się przez 30 sekund, a czerwone przez 2 minuty (nie ma światła żółtego). Pan Abacki przychodzi na skrzyżowanie w losowym momencie czasu.
a) Znajdź dystrybuantę czasu oczekiwania przez pana Abackiego na zielone światło.
b) Pan Abacki czeka już minutę na zielone światło. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie musiał czekać jeszcze ponad pół minuty?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 6

1. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leqslant t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leqslant t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geqslant \frac{3}{7}. \end{cases}$$

   Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leqslant X \leqslant \frac{3}{7})$.

2. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 2. \end{cases}$$

   Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

3. Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie prawostronnie ciągłą, niemalejącą funkcją taką, że $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ oraz $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$. Wykaż, że F jest dystrybuntą pewnej zmiennej losowej.
   Wskazówka. Określmy $\Omega = (0,1)$ z prawdopodobieństwem geometrycznym, zaś zmienną losową X jako

$$X(t) = \sup\{s\colon F(s) \leqslant t\}, \quad t \in (0,1).$$

4. Znajdź wszystkie zmienne losowe X o wartościach naturalnych, takie, że $\mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$ oraz $\mathbb{P}(X \geqslant n+m | X \geqslant n) = \mathbb{P}(X \geqslant m)$ dla wszystkich liczb naturalnych n, m.

5. Podaj przykład zmiennej o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuanta jest ściśle rosnąca.

6. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 \mathbb{1}_{[0,5]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuantę zmiennej X.

7. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1. Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).

8. Znajdź rozkład zmiennej $aX + b$ oraz e^{-X}, gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ.

9. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2, gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

10. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 7

1. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$ oraz $\mathbb{P}(X = -5) = \frac{1}{2}$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{X+1}$, $\mathbb{E}\sin(\pi X)$ i $\mathrm{Var}(X)$.

2. Oblicz $\mathbb{E}t^X$ dla $t \in \mathbb{R}$ i X o rozkładzie Poissona z parametrem λ (tzn. $\mathbb{P}(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$ dla $k = 0, 1, \ldots$).

3. Zmienna losowa X ma gęstość $g(x) = \frac{3}{8}x^2 I_{[0,2]}(x)$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{2+X}$ oraz $\mathrm{Var}(X^2)$.

4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego z parametrem p (numer pierwszego sukcesu w schemacie Bernoulliego).

5. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

6. Do klasy chodzi 20 uczniów. Nauczyciel na każdej lekcji pyta losowo wybranego ucznia. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby uczniów przepytanych w ciągu 15 lekcji.

7. Każdy bok i przekątną siedmiokąta pomalowano w sposób losowy na jeden z trzech kolorów (zakładamy, że kolory różnych odcinków są dobierane niezależnie i każdy z trzech dostępnych kolorów jest wybierany z jednakowym prawdopodobieństwem). Oblicz wartość oczekiwaną liczby jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach bedących wierzchołkami siedmiokąta.

8. Niech $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ oznacza losową permutację zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Niech N oznacza największą liczbę taką, że $\pi(k) > \pi(k-1)$ dla $k \leqslant N$. Oblicz $\mathbb{E}N$.

9. Kij o długości 1 złamano w losowym punkcie. Oblicz wartość oczekiwaną stosunku
   i) długości kawałka prawego do długości lewego,
   ii) długości kawałka krótszego do długości kawałka dłuższego.

10. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Oblicz $\mathrm{Var}(2X - 3Y)$ i $\mathrm{Cov}(5X + 2Y, X - 3Y)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 8

1. Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma rozkład z gęstością
$$g(x, y) = cxy1_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}.$$
i) Znajdź stałą c oraz rozkłady zmiennych X i Y.
ii) Oblicz $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Czy zmienne X, Y są niezależne?
iii) Oblicz $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 1)$.
iv) Znajdź rozkład zmiennej X/Y. Czy zmienna X/Y jest niezależna od Y?

2. Z talii 52 kartowej losujemy 5 razy ze zwracaniem po jednej karcie. Niech X oznacza liczbę wyciągniętych pików, Y - kierów, a Z - waletów. Czy zmienne X i Y są niezależne? Czy zmienne X i Z są niezależne?

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$.
i) Czy zmienne $X_1 + X_2$, X_1X_2 są niezależne?
ii) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_3, X_4 + X_5X_6$ są niezależne?
iii) Czy zmienne $X_1, X_1X_2, \ldots, X_1X_2 \cdots X_n$ są niezależne?

4. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

5. Zmienne $X_0, X_1, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład z ciągłą dystrybuantą. Niech $N := \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz $\mathbb{E}N$.

6. Dla $t \in [0, 1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$.

7. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, przy czym X_i ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_i. Znajdź rozkład zmiennej $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?

9. Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady geometryczne z parametrami odpowiednio p i q. Oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

10. Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio λ i μ. Oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

11. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 9

1. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X+Y, X-Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?

2. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

3. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$. Oblicz $\mathbb{P}(X^2+Y^2 \leqslant 1)$.

4. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wykaż, że $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

5. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład geometryczny z parametrami odpowiednio p i q. Znajdź rozkład $X+Y$ oraz $X-Y$.

6. Mówimy, że zmienna X ma rozkład Γ z parametrem $r>0$ (ozn. $X \sim \Gamma(r)$), jeśli X ma gęstość
$$g_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-x} I_{\{x \geqslant 0\}},$$
gdzie $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$.
a) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \Gamma(r_i)$, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \Gamma(r_1 + \ldots + r_n)$.
b) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz każda z nich ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \frac{1}{\lambda}\Gamma(n)$. (*Uwaga.* Rozkład $a\Gamma(r)$ w zależności od przyjetej konwencji się oznacza jako rozkład $\Gamma(r,a)$ lub $\Gamma(r, 1/a)$.)
c) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, to $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim 2\Gamma(n/2)$. (*Uwaga.* Rozkład ten występuje w wielu zastosowaniach statystycznych i się nazywa rozkładem *chi kwadrat o n stopniach swobody.*)

7. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 10

1. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję następujących rozkładów probabilistycznych:
   i) dwumianowego z parametrami n, p,
   ii) Poissona z parametrem λ,
   iii) geometrycznego z parametrem p,
   iv) jednostajnego na przedziale $[a, b]$,
   v) wykładniczego z parametrem λ,
   vi) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

2. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/4$ oraz $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$. Znajdź medianę X oraz $|X|$.

3. Znajdź medianę rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

4. Mówimy, że zmienna losowa X jest *symetryczna*, jeśli zmienne X i $-X$ mają ten sam rozkład. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
   i) X jest symetryczna,
   ii) X ma ten sam rozkład, co εX, gdzie ε jest niezależne od X i $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$,
   iii) $\mathbb{E} f(X) = 0$ dla dowolnej nieparzystej, ograniczonej funkcji f.

5. Wykaż, że, jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ oraz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

6. Wykaż, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E} \min(|X_n - X|, 1) \to 0$.

7. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n} \max_{i \leqslant n} |X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

8. Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład taki, że $\mathbb{E} X_i^2 < \infty$, to
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E} X_1 \quad \text{wg prawdopodobieństwa.}$$

9. Ciągi zmiennych losowych $(X_n)_{n \geqslant 1}$ oraz $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ są zbieżne według prawdopodobieństwa odpowiednio do X i Y. Udowodnij, że
   i) ciąg $X_n + Y_n$ jest zbieżny do $X + Y$ według prawdododobieństwa,
   ii) ciąg $X_n Y_n$ jest zbieżny do XY według prawdododobieństwa.

10. Dana jest całkowalna zmienna losowa X. Określamy dla $n \geqslant 1$,
$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{dla } X(\omega) < -n \\ X(\omega) & \text{dla } |X(\omega)| \leqslant n \\ n & \text{dla } X(\omega) > n. \end{cases}$$
    Czy ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^1?

11. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..

12. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
    i) według prawdopodobieństwa;
    ii) prawie na pewno;
    iii) w L^2 i $L^{3/2}$.

13. Liczby $p, q > 1$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q, to $X_n Y_n$ zbiega do XY w L^1.

14. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależnymi zmiennymi Rademachera, tzn. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź wszystkie ciągi a_n takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ jest zbieżny p.n..

15. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, nieujemne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| = 0) < 1$. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$ p.n..

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 11

1. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ takie, że X_n ma rozkład jednostajny na $[-n, n]$. Wyznacz wszystkie liczby p dla których szereg $\sum_{n\geqslant 1} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie na pewno.

2. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ oraz $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ jest zbieżny p.n. oraz $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Var}(X_n) = \infty$.

3. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.
i) Wykaż, że jeśli $\lambda > 1$, to z prawdopodobieństwem 1, $X_n < \log n$ dla dużych n, a jeśli $\lambda \leqslant 1$, to z prawdopodobieństwem 1, $X_n \geqslant \log n$ dla nieskończenie wielu n.
ii) Zbadaj zbieżność według prawdopodobieństwa i prawie na pewno ciągu $(X_n/\log n)_{n\geqslant 1}$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Pokaż, że ciągi zmiennych losowych

$$\text{a)}\ \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}, \qquad \text{b)}\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$

są zbieżne prawie na pewno i wyznacz ich granice.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2016. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + \ldots + X_nX_{n+1}X_{n+2}}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnij, że ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i oblicz jego granicę.

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

8. Oblicz granice

a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + \ldots + x_n} dx_1 \ldots dx_n$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} dx_1 \ldots dx_n$,

c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n$, gdzie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą,

d) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \frac{n}{n + x_1 + \ldots + x_n} e^{-(x_1+\ldots+x_n)} dx_1 \ldots dx_n$.

9. Zmienne X_n i Y_n są zbieżne według prawdopodobieństwa do zmiennych X i Y odpowiednio. Wykaż, że jeśli dla każdego n, zmienna X_n ma ten sam rozkład co zmienna Y_n, to zmienne X i Y mają jednakowy rozkład.

10. Wykaż, że jeśli δ_n jest ciągiem liczb dodatnich zbieżnych do 0 takim, że $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \delta_n) < \infty$, to $X_n \to X$ p.n..

11. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają średnią zero i skończone czwarte momenty. Wykaż, że

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^4 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^4 + 6 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{E}X_i^2 \mathbb{E}X_j^2.$$

12. Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają średnią zero oraz $M := \sup_n \mathbb{E}X_n^4 < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ zbiega do 0 p.n.

13. Wykaż, że dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{w } L^1 \text{ przy } n \to \infty.$$

14. Załóżmy, że zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Wykaż, że $N_n/n \to 1$ w L^1 przy $n \to \infty$.

15. Niech f bedzie funkcją ciągłą na $[0,1]$. Dla $n = 1, 2, \ldots$ definiujemy

$$w_n(p) := \mathbb{E}f\left(\frac{S_{n,p}}{n}\right), \text{ gdzie } S_{n,p} \text{ ma rozkład dwumianowy z parametrami } n, p$$

Wykaż, że
i) w_n jest wielomianem stopnia nie większego niż n,
ii) w_n zbiegają jednostajnie do f na $[0,1]$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 12

1. Prawdopodobieństwo wygrania w pewnej loterii jest równe 10^{-6}. W loterii zagrało 500 tysięcy osób. Jakie jest dokładne prawdopodobieństwo tego, że
   i) ktoś wygrał,
   ii) wygrała więcej niż jedna osoba?
   iii) Oszacuj prawdopodobieństwa z i) i ii).

2. Do pewnej tabeli wpisano $n = 10000$ liczb. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza liczba została błędnie wpisana wynosi $0,005$. Wprowadzone liczby są sprawdzane przez kontrolera, który nie wychwytuje błędu z prawdopodobieństwem $0,02$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że po weryfikacji tabela zawiera przynajmniej dwie błędne liczby.

3. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $0,517$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewczynek.

4. Rzucamy kostką do gry aż do wystąpienia szóstki po raz 50. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że rzucimy co najwyżej 400 razy.

5. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracja po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonuje losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

6. W pewnym mieście w wyborach prezydenckich głosuje 500.000 osób. Zakładając, że wyborcy głosują na każdego z dwu kandydatów losowo i niezależnie z prawdopodobieństwem 50% jaka jest szansa, że różnica między kandydatami będzie mniejsza niż 100 głosów?

7. Pewne biuro badania opinii publicznej planuje zrobić sondaż wyborczy przed wyborami prezydenckimi. Przy założeniu losowego wyboru uczestników sondażu ile musi przepytać osób by z prawdopodobieństwem 0.95 uzyskane w sondażu wyniki poparcia dla poszczególnych kandydatów rózniły się od prawdziwych preferencji wyborczych nie więcej niż o 2 punkty procentowe? Jak zmieni się odpowiedź jeśli biuro bada poparcie kandydatów, których chce wybrać nie więcej niż 10% wyborców?

8. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne i $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$.
   a) Oblicz w zależności od t, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n \leqslant t\sqrt{n})$.
   b) Wykaż, że ciąg $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$ nie jest zbieżny prawie na pewno.

9. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1/2) = \mathbb{P}(X_i = 2) = 1/2$. Niech $R_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(R_n \leqslant t)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 13

1. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(n,p)$, Y ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(m,p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X+Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

2. Rzucono kostką najpierw raz, a następnie tyle razy ile oczek wypadło w pierwszym rzucie. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek oraz liczby wyrzuconych trójek.

3. W woreczku znajduje się pewna liczba monet, z których p procent jest sfałszowana, z orłem po obu stronach. Powtarzamy n razy następujące doświadczenie - wyciągamy z woreczka monetę i ją rzucamy, a następnie zwracamy do woreczka. Niech O oznacza liczbę wyrzuconych orłów, zaś F liczbę wylosowań sfałszywanych monet. Wykaż, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p}O$. Ile wynosi $\mathbb{E}(O|F)$?

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
   a) 0blicz $\mathbb{E}(S_n|X_1)$, $\mathbb{E}(S_n^2|X_1)$.
   b) Dla $n \geqslant k$ wyznacz $\mathbb{E}(S_n|S_k)$, $\mathbb{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbb{E}(e^{-S_n}|S_k)$.

5. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

6. Zmienne $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a X_i mają rozkład jednostajny na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$.

7. Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość
$$g(x,y) = \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} I_{x>0,y>0}.$$
   Wyznacz $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X^2)$ oraz $\mathbb{P}(Y > 1|X^3+1)$.

8. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(\max(X,Y)|\min(X,Y))$ oraz $\mathbb{E}(X^3|X+Y)$.

9. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Oblicz $\mathbb{P}(X \in B|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X|X+Y)$.

10. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x.
    a) Wyznacz rozkład Y.
    b) Oblicz $\mathbb{P}(X > r|Y)$.

11. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, całkowalne i mają jednakowy rozkład. Oblicz $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.