Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
   b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.

2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?

3. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
   i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
   ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?

4. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi więcej chłopców niż dziewczynek.

5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
   a) wszystkie karty różnej wartości;
   b) dokładnie dwa piki;
   c) co najmniej dwa piki;
   d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
   e) układ 4432;
   f) układ 4441.

6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
   a) parę
   b) dwie pary
   c) straighta
   d) trójkę
   e) fulla
   f) karetę
   g) kolor
   h) pokera.

7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
   a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
   b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
   c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.

9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
   b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?

10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

11. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leqslant n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
    a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
    b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.

12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?
    b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 2

1. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano w sposób losowy dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

2. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.

3. (Paradoks Bertranda) Z okręgu wybrano w sposób losowy cięciwę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ma ona długość większą od długości boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg.

4. Odcinek PQ jest średnicą okręgu. Na okręgu wybieramy na chybił trafił dwa punkty A i B. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jeden z łuków AB zawiera oba punkty P i Q?

5. Na nieskończoną szachownicę o boku 1 rzucono monetę o średnicy $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta
   a) znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól,
   b) przetnie się z dwoma bokami szachownicy?

6. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

7. Załóżmy, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C)$. Wykaż, że $1/6 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1/4$.

8. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(B) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ i $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$.

9. Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ zachodzą nierówności
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \geqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

10. Wyznacz σ ciało generowane przez
    a) dwa zbiory A i B;
    b) trzy zbiory A, B i C.

11. Czy istnieje σ-ciało złożone z 7-elementów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 3

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) Jacek stoi bezpośrednio przed Agatką, jeśli Agatka stoi bezpośrednio przed Dorotką;
b) Jacek stoi przed Agatką, jeśli Agatka stoi przed Dorotką;
c) Jacek stoi przed Agatką, jeśli wiemy, że Agatka nie stoi ostatnia.

2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
a) mamy co najmniej jednego asa;
b) mamy co najmniej jednego asa czarnego koloru;
c) mamy asa pik;
d) pierwszą wylosowaną kartą jest as;
e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as;
f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

3. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
a) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$;
b) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż $1/4$;
c) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż $1/4$.

4. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny po jednej kuli a następnie zwracamy ją do urny dokładając a kul tego samego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) pierwsza i druga wylosowana kula będzie biała;
b) druga wylosowana kula będzie biała;
c) za pierwszym razem wylosowano kulę białą, jeśli wiemy, że za drugim razem wylosowano kulę białą;
d) w pierwszych trzech losowaniach wylosujemy kule tego samego koloru.

5. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?

6. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej

niż 5 błędów z prawdopodobieństwem 1/10. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?

7. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & \text{dla } n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & \text{dla } n = 0. \end{cases}$$

   Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma
   a) co najmniej jedną córkę;
   b) dokładnie jedną córkę?
   c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona jedynaczką?

8. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe - SP1 i SP2. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w SP1 potrafi rozłożyć liczbę 2015 na czynniki pierwsze niż w SP2 podobnie większy procent chłopców z SP1 potrafi to zrobić niż w SP2. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu liczby 2015 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 4

1. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez trzy, B – za drugim razem wylosowano liczbę oczek podzielną przez trzy, C – suma wyrzuconych oczek jest parzysta. Czy zdarzenia A, B, C są parami niezależne? Czy są niezależne?

2. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k-ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

3. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k-tej kostce wypadła szóstka, $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \ldots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ nie są niezależne.

4. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

5. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
   a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
   b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

6. Rzucamy szóstką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.

7. Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków jest równe $5^k e^{-5}/k!$, $k = 1, 2, \ldots$. Prawdopodobieństwo tego, że w danym wypadku będzie uczestniczył samochód czerwony jest 1/3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków z udziałem samochodów czerwonych.

8. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
   a) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a < 1$,
   b) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 1$ przy $n \to \infty$ dla $a > 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 5

1. Rzucamy nieskończenie wiele razy kostką. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 wystąpi nieskończenie wiele serii złożonych z 2015 szóstek pod rząd.

2. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że
i) jeśli $p \neq 1/2$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie skończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$
ii*) jeśli $p = 1/2$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$

3. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(A_n) < 1$ dla wszystkich n. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n,
ii) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

4. Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł, gracz A płaci B 1 zł., a jeśli reszka, to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
a) Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 gra się zakończy.
b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.

5. Prawdopodobieństwo wygrania w pewnej loterii jest równe 10^{-6}. W loterii zagrało 500 tysięcy osób. Jakie jest dokładne prawdopodobieństwo tego, że
i) ktoś wygrał,
ii) wygrała więcej niż jedna osoba?
iii) Oszacuj prawdopodobieństwa z i) i ii).
iv) Czy odpowiedź w i) się zmieni, jeśli wiemy, że każda z osób obstawiała inny wynik losowania?

6. Do pewnej tabeli wpisano $n = 10000$ liczb. Prawdopodobieństwo, że pojedyncza liczba została błędnie wpisana wynosi $0,005$. Wprowadzone liczby są sprawdzane przez kontrolera, który nie wychwytuje błędu z prawdopodobieństwem $0,02$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że po weryfikacji tabela zawiera przynajmniej dwie błędne liczby.

7. Jaś i Małgosia raz w tygodniu grają w tenisa. Prawdopodobieństwo, że w pojedynczym meczu zwycięży Małgosia jest równe $p \in (0, 1)$. Niech X oznacza numer meczu w którym Małgosia wygrała z Jasiem po raz k-ty. Znajdź rozkład X.

8. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X oznacza minimum, a Y maksimum z uzyskanych liczb oczek. Znajdź rozkłady zmiennych X i Y i sprawdź, że $7-X$ ma ten sam rozkład co Y. Jak się zmieni odpowiedź, gdy będziemy rzucać 10 razy?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 6

1. Na przestrzeni losowej $\Omega = [0,1]$ z prawdopodobieństwem geometrycznym określamy zmienne losowe. $X(t) = t(1-t)$, $Y(t) = \mathbb{1}_{[0,1/2]}(t)$.
i) Wykaż, że X i Y są zmiennymi losowymi
ii) Wyznacz σ-ciała $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.
iii) Czy zmienna Y jest $\sigma(X)$-mierzalna? Czy zmienna X jest $\sigma(Y)$-mierzalna?
iv) Wyznacz dystrybunaty zmiennych X i Y.

2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi na pewnej przestrzeni probabilistycznej oraz $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$. Wykaż, że $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

3. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leqslant t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leqslant t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geqslant \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leqslant X \leqslant \frac{3}{7})$.

4. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 2. \end{cases}$$

Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

5. Na pewnym skrzyżowaniu zielone światło dla pieszych świeci się przez 30 sekund, a czerwone przez 2 minuty (nie ma światła żółtego). Pan Abacki przychodzi na skrzyżowanie w losowym momencie czasu.
a) Znajdź dystrybuantę czasu oczekiwania przez pana Abackiego na zielone światło.
b) Pan Abacki czeka już minutę na zielone światło. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie musiał czekać jeszcze ponad pół minuty?

6. Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie prawostronnie ciągłą, niemalejącą funkcją taką, że $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ oraz $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$. Wykaż, że F jest dystrybuntą pewnej zmiennej losowej.
Wskazówka. Określmy $\Omega = (0,1)$ z prawdopodobieństwem geometrycznym, zaś zmienną losową X jako

$$X(t) = \sup\{s\colon F(s) \leqslant t\}, \quad t \in (0,1).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 7

1. Znajdź wszystkie zmienne losowe X o wartościach naturalnych, takie, że $\mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$ oraz $\mathbb{P}(X \geqslant n+m | X \geqslant n) = \mathbb{P}(X \geqslant m)$ dla wszystkich liczb naturalnych n, m.

2. Podaj przykład zmiennej o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuanta jest ściśle rosnąca.

3. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 \mathbb{1}_{[0,5]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuantę zmiennej X.

4. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1. Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).

5. Znajdź rozkład zmiennej $aX + b$ oraz e^{-X}, gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ.

6. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2, gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

7. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).

8. Zmienna losowa ma ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantę X. Znajdź rozkład zmiennej $F_X(X)$. Czy odpowiedź się zmieni, gdy dystrybuanta nie jest ściśle rosnąca? A gdy jest nieciągła?

9. Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową oraz $\mathbb{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t. Wykaż, że $\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład wykładniczy z pewnym parametrem λ.

10. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 8

1. Z talii 52 kartowej losujemy 5 razy ze zwracaniem po jednej karcie. Niech X oznacza liczbę wyciągniętych pików, Y - kierów, a Z - waletów. Czy zmienne X i Y są niezależne? Czy zmienne X i Z są niezależne?

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$.
   i) Czy zmienne $X_1 + X_2$, $X_1 X_2$ są niezależne?
   ii) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_3, X_4 + X_5 X_6$ są niezależne?
   iii) Czy zmienne $X_1, X_1 X_2, \ldots, X_1 X_2 \cdots X_n$ są niezależne?

3. Dla $t \in [0, 1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$.

4. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

5. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, przy czym X_i ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_i. Znajdź rozkład zmiennej $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

6. Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady geometryczne z parametrami odpowiednio p i q. Oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

7. Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio λ i μ. Oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

8. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

9. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku rosnącym $X_1^*(\omega) \leqslant X_2^*(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \ldots, n$ (X_k^* nazywamy k-tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \ldots, X_n$).

10. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X + Y, X - Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 9

1. Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma rozkład z gęstością
$$g(x, y) = cxy1_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}.$$
i) Znajdź stałą c oraz rozkłady zmiennych X i Y. ii)Czy zmienne X, Y są niezależne?
iii) Oblicz $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 1)$.
iv) Znajdź rozkład zmiennej X/Y. Czy zmienna X/Y jest niezależna od Y?

2. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

3. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Oblicz $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leqslant 1)$.

4. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wykaż, że $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

5. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład geometryczny z parametrami odpowiednio p i q. Znajdź rozkład $X + Y$ oraz $X - Y$.

6. Mówimy, że zmienna X ma rozkład Γ z parametrem $r > 0$ (ozn. $X \sim \Gamma(r)$), jeśli X ma gęstość
$$g_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-x} I_{\{x \geqslant 0\}},$$
gdzie $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$.
a) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \Gamma(r_i)$, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \Gamma(r_1 + \ldots + r_n)$.
b) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz każda z nich ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \frac{1}{\lambda}\Gamma(n)$. (*Uwaga.* Rozkład $a\Gamma(r)$ w zależności od przyjetej konwencji się oznacza jako rozkład $\Gamma(r, a)$ lub $\Gamma(r, 1/a)$.)
c) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, to $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim 2\Gamma(n/2)$. (*Uwaga.* Rozkład ten występuje w wielu zastosowaniach statystycznych i się nazywa rozkładem *chi kwadrat o n stopniach swobody.*)

7. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 10

1. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{4}$ oraz $\mathbb{P}(X=-5)=\frac{1}{2}$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{X+1}$, $\mathbb{E}\sin(\pi X)$ i $\mathrm{Var}(X)$.

2. Oblicz $\mathbb{E}t^X$ dla $t\in\mathbb{R}$ i X o rozkładzie Poissona z parametrem λ.

3. Zmienna losowa X ma gęstość $g(x)=\frac{3}{8}x^2 I_{[0,2]}(x)$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{2+X}$ oraz $\mathrm{Var}(X^2)$.

4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego z parametrem p.

5. Zmienna losowa X ma dystrybuantę
$$F_X(t)=\begin{cases} 0 & \text{dla } t<0\\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0\leqslant t<1\\ \frac{3}{4} & \text{dla } 1\leqslant t<5\\ 1 & \text{dla } t\geqslant 5.\end{cases}$$
Oblicz $\mathbb{E}(10X+2)$.

6. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

7. Do klasy chodzi 20 uczniów. Nauczyciel na każdej lekcji pyta losowo wybranego ucznia. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby uczniów przepytanych w ciągu 15 lekcji.

8. Każdy bok i przekątną siedmiokąta pomalowano w sposób losowy na jeden z trzech kolorów (zakładamy, że kolory różnych odcinków są dobierane niezależnie i każdy z trzech dostępnych kolorów jest wybierany z jednakowym prawdopodobieństwem). Oblicz wartość oczekiwaną liczby jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach bedących wierzchołkami siedmiokąta.

9. Niech $(\pi(1),\ldots,\pi(n))$ oznacza losową permutację zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Niech N oznacza największą liczbę taką, że $\pi(k)>\pi(k-1)$ dla $k\leqslant N$. Oblicz $\mathbb{E}N$.

10. Zmienne $X_0,X_1,\ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład z ciągłą dystrybuantą. Niech $N:=\inf\{n: X_n>X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz $\mathbb{E}N$.

11. Kij o długości 1 złamano w losowym punkcie. Oblicz wartość oczekiwaną stosunku
i) długości kawałka prawego do długości lewego,
ii) długości kawałka krótszego do długości kawałka dłuższego.

12. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki $\mathrm{Var}(X)=2$, $\mathrm{Var}(Y)=4$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=-1$. Oblicz $\mathrm{Var}(2X-3Y)$ i $\mathrm{Cov}(5X+2Y,X-3Y)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 11

1. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję następujących rozkładów probabilistycznych:
   i) dwumianowego z parametrami n, p,
   ii) Poissona z parametrem λ,
   iii) geometrycznego z parametrem p,
   iv) jednostajnego na przedziale $[a, b]$,
   v) wykładniczego z parametrem λ,
   vi) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

2. Zmienna X ma standardowy rozkład normalny. Oblicz $\mathbb{E}X^k$, $\mathbb{E}|X|^k$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

3. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/4$ oraz $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$. Znajdź medianę X oraz $|X|$.

4. Znajdź medianę rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

5. Udowodnij, że dla dowolnej rzeczywistej zmiennej losowej X i $p > 0$,
$$\mathbb{E}|X|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant t) dt.$$

6. Wykaż, że jeśli zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne, to
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

7. Mówimy, że zmienna losowa X jest *symetryczna*, jeśli zmienne X i $-X$ mają ten sam rozkład. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
   i) X jest symetryczna,
   ii) X ma ten sam rozkład, co εX, gdzie ε jest niezależne od X i $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$,
   iii) $\mathbb{E}f(X) = 0$ dla dowolnej nieparzystej, ograniczonej funkcji f.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 12

1. Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład taki, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, to

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{wg prawdopodobieństwa.}$$

2. Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład taki, że $\mathbb{E}X_i^4 < \infty$, to

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.n..}$$

   Wskazówka. Sprowadź do przypadku $\mathbb{E}X_1 = 0$ i oblicz $\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n)^4$.

3. Ciągi zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ oraz $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ są zbieżne według prawdopodobieństwa odpowiednio do X i Y. Udowodnij, że
   i) ciąg $X_n + Y_n$ jest zbieżny do $X + Y$ według prawdodododobieństwa,
   ii) ciąg $X_n Y_n$ jest zbieżny do XY według prawdodododobieństwa.

4. Dana jest całkowalna zmienna losowa X. Określamy dla $n \geqslant 1$,

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{dla } X_n(\omega) < -n \\ X(\omega) & \text{dla } |X_n(\omega)| \leqslant -n \\ n & \text{dla } X_n(\omega) > n. \end{cases}$$

   Czy ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^1?

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..

6. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
   i) według prawdopodobieństwa;
   ii) prawie na pewno;
   iii) w L^2 i $L^{3/2}$.

7. Liczby $p, q > 1$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q, to $X_n Y_n$ zbiega do XY w L^1.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 13

1. Wykaż, że, jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ oraz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

2. Wykaż, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}\min(|X_n - X|, 1) \to 0$.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n}\max_{i\leqslant n}|X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

4. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależnymi zmiennymi Rademachera, tzn. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź wszystkie ciągi a_n takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varepsilon_n$ jest zbieżny p.n..

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, nieujemne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| = 0) < 1$. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$ p.n..

6. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Pokaż, że ciągi zmiennych losowych

$$\text{a)}\ \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}, \qquad \text{b)}\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$

   są zbieżne prawie na pewno i wyznacz ich granice.

7. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2016. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + \ldots + X_nX_{n+1}X_{n+2}}{n}$$

   jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1X_2\cdots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

9. Oblicz granice

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\ldots\int_0^1 \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + \ldots + x_n}dx_1\ldots dx_n,$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1\ldots\int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}dx_1\ldots dx_n,$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\ldots\int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n,$ gdzie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą,

   d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \frac{n}{n + x_1 + \ldots + x_n}e^{-(x_1+\ldots+x_n)}dx_1\ldots dx_n.$