Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposón losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek i Agatka stoją koło siebie;
   b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.

2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?

3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
   a) wszystkie karty różnej wartości;
   b) dokładnie dwa piki;
   c) co najmniej dwa piki;
   d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
   e) układ 4432;
   f) układ 4441.

4. Oblicz prawdopodobieństwo, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
   a) parę
   b) dwie pary
   c) straighta
   d) trójkę
   e) fulla
   f) karetę
   g) kolor
   h) pokera.

5. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
   a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
   b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
   c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 2

1. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
   b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?

2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grze w pokera dostaniemy
   a) co najmniej jednego asa
   b) co najmniej jednego asa i króla
   c) co najmniej jednego asa, króla i damę?

3. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) pewien list trafił do właściwej koperty;
   b) dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

4. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy jeśli wiadomo, że
   a) mamy conajmniej jednego asa
   b) mamy asa czarnego koloru
   c) mamy asa pik
   d) pierwszą wylosowaną kartą jest as
   e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
   f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

5. W pewnej kraju działają trzy sieci telefonii komórkowej. Pierwsza firma ma 40% rynku, druga 35% a trzecia 25%. Wśród abonentów pierwszej firmy 40% osób używa telefonów na kartę, wśród drugiej 50%, a trzeciej 60%.
   a) Jaki procent użytkowników telefonów komórkowych używa telefonu na kartę?
   b) Losowo wybrano użytkownika telefonu na kartę. Jaka jest szansa, że korzysta on z usług pierwszej firmy.

6. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminu wykazały, że większy procent dziewczynek w szkole nr 1 potrafi rozłożyć liczbe 2007 na czynniki pierwsze niż w szkole nr 2, podobnie większy procent chłopców z jedynki potrafi to zrobić niż w dwójce. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu 2007 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

7. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \ldots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

   Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma

a) conajmniej jedną córkę
b) dokładnie jedną córkę?
c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

8. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą aż pojawi się ciąg OOO lub ORO. Jeśli najpierw pojawi się OOO wygrywa gracz A, jeśli ORO gracz B.
   a) Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 gra się zakończy.
   b) Jakie są szanse, że grę wygra gracz A?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 3

1. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny po jednej kuli a następnie zwracamy ją do urny dokładając a kul tego samego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) Pierwsza i druga wylosowana kula będzie biała;
b) W pierwszych trzech losowaniach wylosujemy dokładnie jedną czarną kulę;
c) Druga wylosowana kula będzie biała;
d) n-ta wylosowana kula będzie biała.

2. Z kwadratu jednostkowego wybrano w sposób losowy punkt (x, y). Oblicz
a) $\mathbf{P}(\max(x, y) \leqslant t)$,
b) $\mathbf{P}(x + y \leqslant t)$,
c) $\mathbf{P}(|x - y| \leqslant t)$,
c) $\mathbf{P}(\max(x, y) \leqslant t \mid x + y \leqslant 1/2)$.

3. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo, że igła przetnie którąś z linii.

4. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano w sposób losowy dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

5. Wyznacz σ ciało generowane przez
a) dwa zbiory A i B;
b) trzy zbiory A, B i C.

6. Czy istnieje σ-ciało złożone z 7-elementów?

7. Wiadomo, że $\mathbf{P}(A \cup B) = 0.5$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 0.1$ oraz $\mathbf{P}(A \setminus B) = 2\mathbf{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathbf{P}(A)$ i $\mathbf{P}(B)$.

8. Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ zachodzą nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) \geqslant \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 4

1. Rzucamy kostką do gry n razy. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

2. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leqslant N$). Oblicz wartość oczekiwaną wylosowanych kul białych.

3. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Znajdź wartość oczekiwaną liczby prawidłowo umieszczonych listów.

4. Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż d rzucono na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi w odległości d. Oblicz prawdopodobieństwo, że wielokąt przetnie którąś z linii.

5. Na każdej lekcji historii nauczyciel pyta 3 losowo wybranych z klasy 30 osobowej uczniów. Oblicz wartość oczekiwaną liczby uczniów przepytanych w ciągu 10 kolejnych lekcji
   a) Przynajmniej jeden raz
   b) Dokładnie jeden raz.

6. Kostką do gry rzucamy dopóki
   a) nie pojawi się szóstka
   b*) nie pojawią się wszystkie możliwe liczby oczek.
   Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 5

1. Z kwadratu jednostkowego wylosowano punkt (X, Y). Oblicz dystrybuantę i rozkład następujących zmiennych losowych X, $\min(X, \frac{1}{2})$, $(X - 1/2)^2$, $\operatorname{arctg}(X)$, $\min(X, Y)$, $X + Y$.

2. Naszkicuj dystrybuantę zmiennych losowych o rozkładzie
   a) dwumianowym z parametrami $n = 3$, $p = 1/2$,
   b) geometrycznym z parametrem $p = 1/4$,
   c) Poissona z parametrem $\lambda = 1$.

3. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} x < 0 \\ \frac{1}{7} + 2x & \text{dla } 0 \leqslant x < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + x & \text{dla } \frac{1}{14} \leqslant x < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } x \geqslant \frac{3}{7}. \end{cases}$$

   Oblicz $\mathbf{P}(X \geqslant \frac{3}{7})$, $\mathbf{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(\frac{1}{14} \leqslant X \leqslant \frac{3}{7})$.

4. Oblicz dystrybuatę zmiennych losowych o rozkładzie:
   a) jednostajnym na $[a, b]$.
   b) wykładniczym z parametrem λ.

5. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź rozkład zmiennych losowych: X^3 oraz $2X^2 + 1$.

6. a) Wykaż, że zmienna losowa X o rozkładzie wykładniczym jest „niestarzejącą się” zmienną losową tzn.

$$\mathbf{P}(X > s + t | X > s) = \mathbf{P}(X > t) \text{ dla } s, t > 0.$$

   b*) Wykaż, że jeśli X jest ‚niestarzejącą się” zmienną losową (zakładamy, że $\mathbf{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t), to X ma rozkład wykładniczy.

7. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 I_{[-1,2]}(x)$. Znajdź stałą c, dystrybuantę i wartość oczekiwaną X. Jaki rozkład ma zmienna X^2?

8. Oblicz wartość oczekiwaną podstawowych rozkładów: dwumianowego z parametrami n i p, geometrycznego z parametrem p, Poissona z parametrem λ, jednostajnego na $[a, b]$, wykładniczego z parametrem λ, normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

9. Mówimy, że zmienna X ma rozkład Cauchy'ego z parametrem h, jeśli X ma gęstość $\frac{h}{\pi(x^2+h^2)}$. Ile wynosi wartość oczekiwana X?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 6

1. Z talii 52 kartowej losujemy dwie karty. Rozpatrzmy trzy zdarzenia: wylosowaliśmy dokładnie jednego króla, wylosowaliśmy dokładnie jednego asa, wylosowaliśmy dokładnie jednego pika. Czy są to zdarzenia niezależne? Które z par tych zdarzeń są niezależne?

2. Zdarzenia A, B i C są parami niezależne. Czy wynika stąd niezależność zdarzeń $A \cup B$ i C?

3. Zdarzenia A i B są niezależne oraz $\mathbf{P}(A \cup B) = 1$. Wykaż, że $\mathbf{P}(A) = 1$ lub $\mathbf{P}(B) = 1$.

4. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech A_i dla $i = 1, \ldots, n$ oznacza zdarzenie, że w i-tym rzucie wypadł orzeł, zaś A_{n+1} -wypadła parzysta liczba orłów. Wykaż, że każde n spośród zdarzeń A_i jest niezależne, ale wszystkie A_i nie są.

5. Dla $A \in \mathcal{F}$ zdefiniujmy $A^1 = A$ i $A^{-1} = A^{'}$. Udowodnij, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne.

6. W meczu ligowym gospodarze wygrywają z prawdopodobieństwem 0,5, a goście 0.2. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ośmu meczach kolejki cztery razy zwyciężą gospodarze, trzy razy goście, a raz będzie remis.

7. Oblicz prawdopodobieństwo, że w schemacie Bernoulliego w n próbach i prawdopodobieństwu sukcesu w pojedynczej próbie równym p będzie parzysta liczba sukcesów.

8. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą n razy, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?

9. Rzucamy wielokrotnie parą symetrycznych kości. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek równa 7 wypadnie przed sumą oczek 8.

10. Liczba jajeczek złożona prze owada ma rozkład Poissona z parametrem λ. Z każdego jajeczka z prawdopodobieństwem p wylęga się potomek, niezależnie od innych jajeczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że owad będzie miał dokładnie n potomków.

11. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.

12. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń A_i?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 7

1. Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie funkcją prawostronnie ciągłą, niemalejącą taką, że $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ oraz $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$, zaś Y ma rozkład jednostajny na $(0,1)$. Wykaż, że istnieje funkcja niemalejąca $\varphi\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ taka, że zmienna $X = \varphi(Y)$ ma dystrybuantę F.

2. Oblicz wariancję podstawowych rozkładów: dwumianowego z parametrami n i p, geometrycznego z parametrem p, Poissona z parametrem λ, jednostajnego na $[a,b]$, wykładniczego z parametrem λ, normalnego $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$.

3. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Znajdź wariancję liczby prawidłowo umieszczonych listów.

4. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leqslant N$). Oblicz wariancję liczby wylosowanych kul białych.

5. Oblicz $\mathbf{E}|X|^p$ dla $p > 0$ w przypadku gdy
   a) X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ,
   b) X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 8

1. a) Pokazać, że funkcje Rademachera $r_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_1)$
   b) dla $t \in [0,1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy np. to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_1)$.

2. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (zob. zad. 4.). Dla skończonych podzbiorów A liczb całkowitych dodatnich zdefiniujmy funkcje Walsha
$$w_A = \begin{cases} \prod_{i \in A} \varepsilon_i & \text{jeśli } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{jeśli } A = \emptyset \end{cases}$$
   a) znajdź rozkład w_A
   b) wykaż, że w_A, w_B są niezależne gdy $A \neq B$. Czy w_A, w_B, w_C muszą być niezależne dla różnych indeksów A, B, C?

3. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku rosnącym $X_1^*(\omega) \leqslant X_2^*(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min(X_1, \ldots, X_n), X_n^* = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \ldots, n$ (X_k^* nazywamy k-tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \ldots, X_n$).

4. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r. Oblicz $\mathbf{P}(X < Y)$.

5. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrami λ i μ.

6. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbf{P}(X = Y) = 0$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 9

1. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$. Jaki rozkład ma zmienna $cX+d$?

2. Znajdź rozkład $X+Y$ jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz
a) $X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_2)$
b) X, Y mają rozkład jednostajny na $[0,1]$
c) $X \sim \mathcal{N}(a_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(a_2,\sigma_2^2)$
d) $X \sim \Gamma(\alpha_1,\beta)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2,\beta)$.

3. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a $\mathbf{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład εX oraz $X - Y$.

4. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

5. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.
a) Jaki rozkład ma zmienna $\sum_{i=1}^n a_i X_i$?
b) Oblicz kowariancję i korelację zmiennych $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ oraz $\sum_{i=1}^n b_i X_i$ dla $a, b \in \mathbb{R}^n$.
c) Wykaż, że zmienne $X_1 - X_2, X_1 + X_2$ są niezależne.

6. $X_0, X_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $N = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz EN.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 10

1. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$, to $aX_n+bY_n \xrightarrow{\mathbf{P}} aX+bY$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b.
2. Wykaż, że $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{E}\min(|X_n - X|, 1) \to 0$.
3. Załóżmy, że $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(X_n, Y_n) \to f(X, Y)$.
4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n}\max_{i\leqslant n}|X_i| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.
5. Wykaż, że jeśli ε_n jest ciągiem liczb dodatnich zbieżnych do 0 takim, że $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon_n) < \infty$, to $X_n \to X$ p.n..

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 11

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$ dla pewnego $p \in (1/2, 1]$. Wykaż, że $X_1 + \ldots + X_n \to \infty$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$.

2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Pokazać, że ciągi zmiennych losowych

$$a)\ \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}, \quad b)\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$

są zbieżne prawie na pewno i znaleźć ich granice.

3. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie taki, że $\mathbf{E}X_i = \infty$ (tzn $\mathbf{E}X_i^- < \infty$ oraz $\mathbf{E}X_i^+ = \infty$). Udowodnij, że $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to \infty$ prawie na pewno, gdy $n \to \infty$.

4. Oblicz granice
a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{x_1+\ldots+x_n} dx_1 \ldots dx_n$;
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} dx_1 \ldots dx_n$;
c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}) dx_1 \ldots dx_n$, gdzie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Dla ciągu $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie o skończonej wariancji definiujemy średnią empiryczną $\bar{m}_n$ i dystrybuantę empiryczną $\bar{\sigma}_n^2$ wzorami

$$\overline{m}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \quad \overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{m}_n)^2.$$

Udowodnij, że $\mathbf{E}\overline{m}_n = \mathbf{E}X_1$, $\mathbf{E}\overline{\sigma}_n^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ (tzn. $\overline{m}_n$ i $\overline{\sigma}_n^2$ są nieobciążonymi estymatorami średniej i wariancji) oraz $\overline{m}_n \to \mathbf{E}X_1$, $\overline{\sigma}_n^2 \to \mathrm{Var}(X_1)$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$.