Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek i Agatka stoją koło siebie;
   b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.

2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?

3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
   a) wszystkie karty różnej wartości;
   b) dokładnie dwa piki;
   c) co najmniej dwa piki;
   d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
   e) układ 4432;
   f) układ 4441.

4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
   a) parę
   b) dwie pary
   c) straighta
   d) trójkę
   e) fulla
   f) karetę
   g) kolor
   h) pokera.

5. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
   a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
   b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
   c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

6. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w totolatka wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.

7. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
   b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?

8. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

9. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leqslant n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
   b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.

10. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 2

1. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano w sposób losowy dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

2. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo, że igła przetnie którąś z linii.

3. Na nieskończoną szachownicę o boku 1 rzucono monetę o średnicy $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta
a) znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól
b) przetnie się z dwoma bokami szachownicy?

4. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

5. Załóżmy, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C)$. Wykaż, że $1/6 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1/4$.

6. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(B) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ i $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$.

7. Wyznacz σ ciało generowane przez
a) dwa zbiory A i B;
b) trzy zbiory A, B i C.

8. Czy istnieje σ-ciało złożone z 7-elementów?

9. Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ zachodzą nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \geqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 3

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek stoi bezpośrednio przed Agatką, jeśli Agatka stoi bezpośrednio przed Dorotką;
   b) Jacek stoi przed Agatką, jeśli Agatka stoi przed Dorotką

2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy jeśli wiadomo, że
   a) mamy conajmniej jednego asa
   b) mamy asa czarnego koloru
   c) mamy asa pik
   d) pierwszą wylosowaną kartą jest as
   e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
   f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

3. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny po jednej kuli a następnie zwracamy ją do urny dokładając a kul tego samego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Pierwsza i druga wylosowana kula będzie biała;
   b) Druga wylosowana kula będzie biała;
   c) Za pierwszym razem wylosowano kulę białą, jeśli wiemy, że za drugim razem wylosowano kulę białą;
   d) W pierwszych trzech losowaniach wylosujemy kule tego samego koloru.

4. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dylektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów z prawdopodobieństwem 1/10. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?

5. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe
$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$
   Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma
   a) conajmniej jedną córkę
   b) dokładnie jedną córkę?
   c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

6. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez trzy; B – za drugim razem wylosowano liczbę oczek podzielną przez trzy C – suma wyrzuconych oczek jest parzysta. Czy zdarzenia A, B, C są parami niezależne? Czy są niezależne?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 4

1. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w szkole nr 1 potrafi rozłożyć liczbe 2012 na czynniki pierwsze niż w szkole nr 2, podobnie większy procent chłopców z jedynki potrafi to zrobić niż w dwójce. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu 2012 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

2. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k-ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

3. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

4. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
   a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
   b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

5. Rzucamy szóstką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.

6. Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków jest równe $5^k e^{-5}/k!$, $k = 1, 2, \ldots$. Prawdopodobieństwo tego, że w danym wypadku będzie uczestniczył samochód czerwony jest 1/3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków z udziałem samochodów czerwonych.

7. Rzucono n symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba orłów jest podzielna przez k dla $k = 2, 3, 4$.

8. Wykaż (używając metod probabilistycznych), że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n, m oraz $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q + 1$ zachodzi nierówność $(1 - p^n)^m + (1 - p^m)^n \geqslant 1$.

9. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną modelującą schemat Bernoulliego z parametrami n i p. Dla $0 \leqslant k \leqslant n$ przez A_k określamy zdarzenie, że zaszło k sukcesów. Wykaż, że $\mathbb{P}(B|A_k)$ dla $B \in \mathcal{F}$ nie zależy od parametru p.

10. Rzucamy nieskończenie wiele razy kostką. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 wystąpi nieskończenie wiele serii złożonych z 2012 szóstek pod rząd.

11. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że
i) jeśli $p \neq 1/2$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie skończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \dots$
ii*) jeśli $p = 1/2$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \dots$

12. Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka, to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.
b) Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfałszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$?

13. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k-tej kostce wypadła szóstka, $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \dots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ nie są niezależne.

14. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
a) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a < 1$,
b) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 1$ przy $n \to \infty$ dla $a > 1$.

15. Z przedziału $[0, 1]$ losujemy dwie liczby dzielące go na trzy przedziały. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że najkrótszy z powstałych przedziałów ma długość mniejszą niż $1/5$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 5

1. Jaś i Małgosia raz w tygodniu grają w tenisa. Prawdopodobieństwo, że w pojedynczym meczu zwycięży Małgosia jest równe $p \in (0,1)$. Niech X oznacza numer meczu w którym Małgosia wygrała z Jasiem po raz k-ty. Znajdź rozkład X.

2. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X oznacza minimum, a Y maksimum z uzyskanych liczb oczek. Znajdź rozkłady zmiennych X i Y i sprawdź, że $7 - X$ ma ten sam rozkład co Y.

3. Zmienna losowa X ma dystrybuantę
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leqslant t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leqslant t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geqslant \frac{3}{7}. \end{cases}$$
Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leqslant X \leqslant \frac{3}{7})$.

4. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 2. \end{cases}$$
Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

5. Na pewnym skrzyżowaniu zielone światło dla pieszych świeci się przez 30 sekund, a czerwone przez 2 minuty (nie ma światła żółtego). Pan Abacki przychodzi na skrzyżowanie w losowym momencie czasu.
a) Znajdź rozkład czasu oczekiwania przez pana Abackiego na zielone światło.
b) Pan Abacki czeka już minutę na zielone światło. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie musiał czekać jeszcze ponad pół minuty?

6. Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie prawostronnie ciągłą, niemalejącą funkcją taką, że $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ oraz $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$. Wykaż, że F jest dystrybuntą pewnej zmiennej losowej.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 6

1. Z talii 52 kartowej losujemy 5 razy ze zwracaniem po jednej karcie. Niech X oznacza liczbę wyciągniętych pików, Y - kierów, a Z - waletów. Czy zmienne X i Y są niezależne? Czy zmienne X i Z są niezależne?

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$.
i) Czy zmienne $X_1 + X_2$, $X_1 X_2$ są niezależne?
ii) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_3, X_4 + X_5 X_6$ są niezależne?
iii) Czy zmienne $X_1, X_1 X_2, \ldots, X_1 X_2 \cdots X_n$ są niezależne?

3. Dla $t \in [0,1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |.|)$.

4. Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady geometryczne z parametrami odpowiednio p i q. Oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

5. Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio λ i μ. Oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

6. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

7. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

8. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1. Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).

9. Znajdź rozkład zmiennej $aX + b$ oraz e^{-X}, gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ.

10. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2, gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

11. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?

12. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X+Y, X-Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?

13. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).

14. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku rosnącym $X_1^*(\omega) \leqslant X_2^*(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \ldots, n$ (X_k^* nazywamy k-tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \ldots, X_n$).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 7

1. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, przy czym X_i ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_i. Znajdź rozkład zmiennej $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

2. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wykaż, że $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

3. Do pewnej tabeli wpisano $n = 10000$ liczb. Prawdopodobieństwo, że pojedyncza liczba została błędnie wpisana wynosi $0,005$. Wprowadzone liczby są sprawdzane przez kontrolera, który wychwytuje błąd z prawdopodobieństwem $0,02$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że po weryfikacji tabela zawiera przynajmniej dwie błędne liczby.

4. Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma rozkład z gęstością
$$g(x, y) = cxy1_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}.$$
i) Znajdź stałą c. Czy zmienne X, Y są niezależne?
ii) Oblicz $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 1)$.
iii) Znajdź rozkład zmiennej X/Y. Czy zmienna X/Y jest niezależna od Y?

5. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

6. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Oblicz $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leqslant 1)$.

7. Mówimy, że zmienna X ma rozkład Γ z parametrem $r > 0$ (ozn. $X \sim \Gamma(r)$), jeśli X ma gęstość
$$g_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-x} I_{\{x \geqslant 0\}},$$
gdzie $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$.
a) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \Gamma(r_i)$, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \Gamma(r_1 + \ldots + r_n)$.
b) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz każda z nich ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, to $X_1 + \ldots + X_n \sim \frac{1}{\lambda}\Gamma(n)$. (*Uwaga.* Rozkład $a\Gamma(r)$ w zależności od przyjetej konwencji się oznacza jako rozkład $\Gamma(r, a)$ lub $\Gamma(1/a, r)$.)
c) Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, to $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim 2\Gamma(n/2)$. (*Uwaga.* Rozkład ten występuje w wielu zastosowaniach statystycznych i się nazywa rozkładem *chi kwadrat o n stopniach swobody.*)

8. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 8

1. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{4}$ oraz $\mathbb{P}(X=-5)=\frac{1}{2}$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{X+1}$, $\mathbb{E}\sin(\pi X)$ i $\mathrm{Var}(X)$.

2. Oblicz $\mathbb{E}t^X$ dla $t \in \mathbb{R}$ i X o rozkładzie Poissona z parametrem λ.

3. Zmienna losowa X ma gęstość $g(x)=\frac{3}{8}x^2 I_{[0,2]}(x)$. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{2+X}$ oraz $\mathrm{Var}(X^2)$.

4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego z parametrem p.

5. Zmienna losowa X ma dystrybuantę
$$F_X(t)=\begin{cases} 0 & \text{dla } t<0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leqslant t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{dla } 1 \leqslant t < 5 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 5. \end{cases}$$
Oblicz $\mathbb{E}(10X+2)$.

6. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

7. Do klasy chodzi 20 uczniów. Nauczyciel na każdej lekcji pyta losowo wybranego ucznia. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby uczniów przepytanych w ciągu 15 lekcji.

8. Każdy bok i przekątną siedmiokąta pomalowano w sposób losowy na jeden z trzech kolorów (zakładamy, że kolory różnych odcinków są dobierane niezależnie i każdy z trzech dostępnych kolorów jest wybierany z jednakowym prawdopodobieństwem). Oblicz wartość oczekiwaną liczby jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach bedących wierzchołkami siedmiokąta.

9. Udowodnij, że dla dowolnej rzeczywistej zmiennej losowej X i $p>0$,
$$\mathbb{E}|X|^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(|X| \geqslant t)dt.$$

10. Wykaż, że jeśli zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne, to
$$\mathbb{E}X=\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geqslant k)=\sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(X>k).$$

11. Niech $(\pi(1),\ldots,\pi(n))$ oznacza losową permutację zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Niech N oznacza największą liczbę taką, że $\pi(k)>\pi(k-1)$ dla $k \leqslant N$. Oblicz $\mathbb{E}N$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 9

1. Zmienne $X_0, X_1, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład z ciągłą dystrybuantą. Niech $N := \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz $\mathbb{E}N$.

2. Kij o długości 1 złamano w losowym punkcie. Oblicz wartość oczekiwaną stosunku
i) długości kawałka prawego do długości lewego,
ii) długości kawałka krótszego do długości kawałka dłuższego.

3. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Oblicz $\mathrm{Var}(2X - 3Y)$ i $\mathrm{Cov}(5X + 2Y, X - 3Y)$.

4. Zmienna losowa X ma wariancję σ^2, wykaż, że
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geqslant 4\sigma) \leqslant \frac{1}{16}.$$

5. Niech $S = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i$, gdzie (ε_i) są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}e^{\lambda S} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \mathbb{E}S^2}$$
i wywnioskuj stąd, że dla $t \geqslant 0$,
$$\mathbb{P}\Big(|S| \geqslant t(\mathbb{E}S^2)^{1/2}\Big) \leqslant 2e^{-t^2/2}.$$

6. Niech $S_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, gdzie (ε_i) są jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1 \ \text{ p.n.}$$
oraz
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \geqslant -1 \ \text{ p.n..}$$

7. Zmienna losowa X spełnia warunek
$$\mathbb{E}|X|^n \leqslant \binom{2n}{n} \quad n = 1, 2, \ldots.$$
Wykaż, że $\|X\|_\infty < \infty$, tzn. istnieje liczba $M < \infty$ taka, że $\mathbb{P}(|X| > M) = 0$.

8. Nadajnik wysyła sygnał X, a odbiornik odbiera sygnał $Z = aX + Y$, gdzie $a > 0$, a Y jest losowym zaburzeniem niezależnym od X. Załóżmy, że $\mathbb{E}X = m$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathbb{E}Y = 0$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$. Oblicz współczynnik korelacji X i Z oraz regresję liniową X względem Z, tzn. najlepsze (względem wariancji) przybliżenie liniowe X za pomocą Z.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 10

1. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależnymi zmiennymi Rademachera, tzn. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że ciąg X_n nie jest zbieżny p.n.. Czy jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

2. Niech $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ będą jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że szereg $S = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon_n$ jest zbieżny p.n. i znajdź rozkład S.

3. Ciągi zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ oraz $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ są zbieżne według prawdopodobieństwa odpowiednio do X i Y. Udowodnij, że
   i) ciąg $X_n + Y_n$ jest zbieżny do $X + Y$ według prawdododobieństwa,
   ii) ciąg X_nY_n jest zbieżny do XY według prawdododobieństwa.

4. Dana jest całkowalna zmienna losowa X. Określamy dla $n \geqslant 1$,
$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{dla } X_n(\omega) < -n \\ X(\omega) & \text{dla } |X_n(\omega)| \leqslant -n \\ n & \text{dla } X_n(\omega) > n. \end{cases}$$
   Czy ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^1?

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1X_2\cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, nieujemne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| = 0) < 1$. Wykaż, że ciąg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$ p.n..

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne (o niekoniecznie jednakowym rozkładzie). Wykaż, że
   i) ciąg średnich $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ albo jest zbieżny p.n. albo z prawdopodobieństwem 1 jest rozbieżny,
   ii) jeśli powyższy ciąg jest zbieżny p.n., to jego granica ma rozkład jednopunktowy.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 11

1. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. i) Wykaż, że jeśli $\lambda > 1$, to z prawdopodobieństwem 1, $X_n < \log n$ dla dużych n, a jeśli $\lambda \leqslant 1$, to z prawdopodobieństwem 1, $X_n \geqslant \log n$ dla nieskończenie wielu n.
   ii) Zbadaj zbieżność według prawdopodobieństwa i prawie na pewno ciągu $(X_n/\log_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
   i) według prawdopodobieństwa;
   ii) prawie na pewno;
   iii) w L^2 i $L^{3/2}$.

3. Liczby $p, q >$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q, to X_nY_n zbiega do XY w L^1.

4. Zmienne X_n i Y_n są zbieżne p.n. do zmiennych X i Y odpowiednio. Wykaż, że jeśli dla każdego n, zmienna X_n ma ten sam rozkład co zmienna Y_n, to zmienne X i Y mają jednakowy rozkład.

5. Wykaż, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}\min(|X_n - X|, 1) \to 0$.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n}\max_{i\leqslant n}|X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

7. Wykaż, że jeśli ε_n jest ciągiem liczb dodatnich zbieżnych do 0 takim, że $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon_n) < \infty$, to $X_n \to X$ p.n..

8. Jakie warunki musi spełniać zbiór $T \subset (0, \infty)$, by rodzina $(X_t)_{t\in T}$ była jednostajnie całkowalna, jeśli
   i) X_t ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, t]$,
   ii) X_t ma rozkład wykładniczy z parametrem t.

9. Załóżmy, że funkcja $G \to [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ spełnia warunek $\lim_{t\to\infty}\frac{G(t)}{t} = \infty$. Wykaż, że każda rodzina zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ spełniająca warunek $\sup_{i\in I}\mathbb{E}G(|X_i|) < \infty$ jest jednostajnie całkowalna.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 12

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Pokaż, że ciągi zmiennych losowych
$$a)\ \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}, \quad b)\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$
są zbieżne prawie na pewno i wyznacz ich granice.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2012. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych
$$\frac{X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + \ldots + X_nX_{n+1}X_{n+2}}{n + 2012}$$
jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnij, że ciąg średnich
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
jest zbieżny prawie na pewno i oblicz jego granicę.

4. Dane są niezależne zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$. Wykaż, że
$$\frac{1_{A_1} + 1_{A_2} + \ldots + 1_{A_n}}{n} - \frac{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)}{n} \to 0$$
według prawdopodobieństwa przy $n \to \infty$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Wykaż, że dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ ciąg średnich
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{w } L^1 \text{ przy } n \to \infty.$$

7. Załóżmy, że zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Wykaż, że $N_n/n \to 1$ w L^1 przy $n \to \infty$.

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Czy ciąg
$$\frac{X_1 + X_2^2 + \ldots + X_n^n}{n}$$
jest zbieżny prawie na pewno przy $n \to \infty$?

9. Oblicz granice
a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{x_1+\ldots+x_n} dx_1 \ldots dx_n$;
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} dx_1 \ldots dx_n$;
c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}) dx_1 \ldots dx_n$, gdzie $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 13

1. Załóżmy, że $X, X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $t\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \to 0$ przy $t \to \infty$. Wykaż, że
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E}(XI_{|X|\leqslant n}) \to 0 \text{ według prawdodoobieństwa.}$$

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie z gęstością $\frac{c}{(1+x^2)\ln(e+|x|)}$. Wykaż, że $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n \to 0$ według prawdopodobieństwa. Czy ciąg ten jest zbieżny prawie na pewno?

3. Udowodnij twierdzenie o dwóch szeregach: jeśli $(X_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem zmiennych losowych o skończonych wariancjach, takim, że zbieżne są szeregi $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}X_n$ i $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Var}(X_n)$, to szereg $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ jest zbieżny prawie na pewno.

4. Zmienne losowe $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne i $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$. Dla jakich ciągów (a_n) szereg $\sum_{n\geqslant 1} a_n\varepsilon_n$ jest zbieżny prawie na pewno?

5. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ takie, że X_n ma rozkład jednostajny na $[-n, n]$. Wyznacz wszystkie liczby p dla których szereg $\sum_{n\geqslant 1} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie na pewno.

6. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $0,517$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewczynek.

7. Rzucamy kostką do gry aż do wystąpienia szóstki po raz 50. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że rzucimy co najwyżej 400 razy.

8. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracja po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonuje losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

9. W pewnym stanie w wyborach prezydenckich głosuje 500.000 osób. Zakładając, że wyborcy głosują na każdego z dwu kandydatów losowo i niezależnie z prawdopodobieństwem 50% jaka jest szansa, że różnica między kandydatami będzie mniejsza niż 100 głosów?

10. Agata rzuciła monetą 100 razy i uzyskała 70 orłów. Jan chce powtórzyć ten wyczyn (tzn. otrzymać 70 lub więcej orłów) i zamierza w tym celu rzucać monetą aż do skutku. Ile średnio serii po 100 rzutów potrzeba, aby się doczekać 70 lub więcej orłów?

11. Pewne biuro badania opinii publicznej planuje zrobić sondaż wyborczy przed wyborami prezydenckimi. Przy założeniu losowego wyboru uczestników sondażu ile musi przepytać osób by z prawdopodobieństwem 0.95 uzyskane w sondażu wyniki poparcia dla poszczególnych kandydatów różniły się od prawdziwych preferencji wyborczych nie więcej niż o 2 punkty procentowe? Jak zmieni się odpowiedź jeśli biuro bada poparcie kandydatów, których chce wybrać nie więcej niż 10% wyborców?

12. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne i $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$.
a) Oblicz w zależności od t, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n \leqslant t\sqrt{n})$.
b) Wykaż, że ciąg $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$ nie jest zbieżny prawie na pewno.

13. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1/2) = \mathbb{P}(X_i = 2) = 1/2$. Niech $R_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(R_n \leqslant t)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 14

1. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Oblicz $\mathbb{E}(\varepsilon_1 | \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ i $\mathbb{E}(\varepsilon_1\varepsilon_2 | \varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3)$.

2. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(n,p)$, Y ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(n,p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X+Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

3. Rzucono kostką najpierw raz, a następnie tyle razy ile oczek wypadło w pierwszym rzucie. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek oraz liczby wyrzuconych trójek.

4. W urnie znajduje się a kul białych, b kul czarnych i c kul czerwonych, przy czym $a, b, c \geqslant 1$. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli z urny dopóki nie wylosujemy kuli czerwonej. Oblicz wartość oczekiwaną wylosowanych kul białych.

5. W woreczku znajduje się pewna liczba monet, z których p procent jest sfałszowana, z orłem po obu stronach. Powtarzamy n razy następujące doświadczenie - wyciągamy z woreczka monetę i ją rzucamy, a następnie zwracamy do woreczka. Niech O oznacza liczbę wyrzuconych orłów, zaś F liczbę wylosowań sfałszywanych monet. Wykaż, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p}O$. Ile wynosi $\mathbb{E}(O|F)$?

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
a) 0blicz $\mathbb{E}(S_n|X_1)$, $\mathbb{E}(S_n^2|X_1)$.
b) Dla $n \geqslant k$ wyznacz $\mathbb{E}(S_n|S_k)$, $\mathbb{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbb{E}(e^{-S_n}|S_k)$.

7. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

8. Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość
$$g(x,y) = \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} I_{x>0,y>0}.$$
Wyznacz $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X^2)$ oraz $\mathbb{P}(Y > 1|X^3 + 1)$.

9. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(\max(X,Y)|\min(X,Y))$ oraz $\mathbb{E}(X^3|X+Y)$.

10. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Oblicz $\mathbb{P}(X \in B|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X|X+Y)$.

11. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x.
a) Wyznacz rozkład Y.
b) Oblicz $\mathbb{P}(X > r|Y)$.

12. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, całkowalne i mają jednakowy rozkład. Oblicz $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

13. Dane jest σ-ciało $\mathcal{G}$ oraz zmienne losowe X i Y takie, że zmienna X jest mierzalna względem $\mathcal{G}$, a Y jest niezależna od $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji borelowskiej h takiej, że $\mathbb{E}|h(X,Y)| < \infty$,

$$\mathbb{E}(h(X,Y)|\mathcal{G}) = H(X) \text{ p.n.},$$

gdzie $H(x) = \mathbb{E}h(x,Y)$.

14. Załóżmy, że X jest całkowalną zmienną losową, zaś σ-ciało $\mathcal{G}_2$ jest niezależne od X i σ-ciała $\mathcal{G}_1$. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)) = \mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{G}_1)) \text{ p.n..}$$

15. Zmienne losowe X, Y i Z są niezależne, przy czym X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, Y jest nieujemną zmienną ograniczoną oraz $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = 1/2$. Oblicz $\mathbb{E}(e^{XY}|Y)$ oraz $\mathbb{E}(e^{XY}|YZ)$.

16. Zmienne $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a X_i mają rozkład jednostajny na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$.