Zadania z rachunku prawdopodobieństwa I* - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
   b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.

2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?

3. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
   i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
   ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?

4. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi więcej chłopców niż dziewczynek.

5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
   a) wszystkie karty różnej wartości;
   b) dokładnie dwa piki;
   c) co najmniej dwa piki;
   d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
   e) układ 4432;
   f) układ 4441.

6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
   a) parę
   b) dwie pary
   c) straighta
   d) trójkę
   e) fulla
   f) karetę
   g) kolor
   h) pokera.

7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
   a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
   b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
   c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.

9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
   b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?

10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

11. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leqslant n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
    a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
    b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.

12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?
    b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 2
(zadania gwiazdkowe do oddania 8 marca)

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ takie, że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły pod rząd. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie k razy.

3. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.

4* Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż d rzucono na płaszczyznę poliniowaną jak w poprzednim zadaniu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wielokąt przetnie którąś z linii. Co się dzieje, gdy wielokąt nie jest wypukły?

5. Na kiju długości l wybrano na chybił trafił 2 punkty i w tych punktach przełamano kij. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że z otrzymanych 3 kawałków można zbudować trójkąt.

6* Udowodnij, że każde σ-ciało albo ma 2^k elementów dla pewnego k naturalnego albo ma moc przynajmniej continuum.

7* Wykaż, że liczba σ-ciał podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ jest równa $\frac{1}{e}\sum_{k\geqslant 0} \frac{k^n}{k!}$.

8. Udowodnij następujące tożsamości

$$(\limsup A_n)' = \liminf(A_n'), \quad (\liminf A_n)' = \limsup(A_n'),$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \quad \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$

$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n,$$

$$\text{jeśli } A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A, \text{ to } A = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

9. Wykaż, że jeśli $A_n = (-\infty, x_n)$ oraz $x = \limsup x_n$ to $\limsup A_n = (-\infty, x)$ lub $(-\infty, x]$ oraz oba te przypadki mogą zajść.

10. Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń probabilistycznych
i) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$
ii) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leqslant \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ dla m nieparzystych
iii) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geqslant \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ dla m parzystych.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 3
(zadania gwiazdkowe do oddania 15 marca)

1. Udowodnij, że wzór $\rho(A,B) := \mathbb{P}(A\Delta B)$ zadaje pseudometrykę na $\mathcal{F}$ spełniającą warunek trójkąta.

2* Załóżmy, że koła rozłączne $B(x_i,r_i)$ są zawarte w pewnym prostokącie oraz pokrywają ten prostokąt z dokładnością do zbioru miary 0. Wykaż, że $\sum_i r_i = \infty$.

3* Udowodnij, że nie istnieje prawdopodobieństwo określone na wszystkich podzbiorach $\mathbb{Z}_+$ takie, że dla wszystkich k, $P(A_k) = 1/k$, gdzie A_k jest zbiorem liczb podzielnych przez k.

4. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
i) mamy conajmniej jednego asa,
ii) mamy asa czarnego koloru,
iii) mamy asa pik,
iv) pierwszą wylosowaną kartą jest as,
v) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as,
vi) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

5. Z odcinka $[0,1]$ wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
i) większa z liczb jest mniejsza niż 1/2;
ii) większa z liczb jest mniejsza niż 1/2, jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż 1/4;
iii) większa z liczb jest mniejsza niż 1/2, jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż 1/4.

6. (schemat urnowy Polya) Urna zawiera b kul białych i c kul czarnych. Wykonujemy kolejno następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem do urny, a wraz z nią dokładamy do urny a kul tego samego koloru. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania w n-tym losowaniu kuli białej jest równe $\frac{b}{b+c}$.

7. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?

8. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1,2,\dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma
a) conajmniej jedną córkę
b) dokładnie jedną córkę?
c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

9. Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.
b) Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfałszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$?

10. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dylektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów z prawdopodobieństwem 1/10. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?

11. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w szkole nr 1 potrafi rozłożyć liczbe 2012 na czynniki pierwsze niż w szkole nr 2, podobnie większy procent chłopców z jedynki potrafi to zrobić niż w dwójce. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu 2012 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 4
(zadania gwiazdkowe do oddania 22 marca)

1. Załóżmy, że μ_1 i μ_2 są miarami probabibilistycznymi oraz $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ dla $A \in \mathcal{A}$.
i) Wykaż, że jeśli $\mathcal{A}$ jest π-układem, to $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ dla $A \in \sigma(\mathcal{A})$.
ii) Podaj przykład pokazujący, że teza i) nie musi być prawdziwa, gdy usuniemy założenie o tym, że $\mathcal{A}$ jest π-układem.

2. Dla $A \in \mathcal{F}$ zdefiniujmy $A^1 = A$ i $A^{-1} = A'$. Wykaż, że
i) dla dowolnego ciągu znaków $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne,
ii) zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu znaków $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi
$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1}) \cdots \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}).$$

3. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k-ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

4. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k-tej kostce wypadła szóstka, $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \ldots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia $A_1, \ldots, A_{n+1}$ nie są niezależne.

5. Udowodnij, że w definicji niezależności n zdarzeń każde z $2^n - n - 1$ równań jest niezbędne (tzn. jeśli odrzucimy jedno z równań to istnieją zdarzenia zależne spełniające wszystkie pozostałe równania).

6. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w schemacie Bernoulliego w n próbach i prawdopodobieństwu sukcesu w pojedynczej próbie równym p będzie parzysta liczba sukcesów.

8. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą n razy, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?

9. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

10. Rzucamy kostką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.

11* Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
a) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a < 1$,
b) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 1$ przy $n \to \infty$ dla $a > 1$.

12. Wykaż (używając metod probabilistycznych), że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n, m oraz $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q = 1$ zachodzi nierówność $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geqslant 1$.

13* Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą symetryczną. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$. Ile wynosi to prawdopodobieństwo, jeśli moneta nie jest symetryczna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 5

(zadania gwiazdkowe do oddania 29 marca)

1. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.

2. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(A_n) < 1$ dla wszystkich n. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
   i) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n,
   ii) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

3. Zmienna losowa X ma ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantę F. Znajdź rozkład zmiennej $F(X)$. Czy odpowiedź się zmieni, jeśli nie założymy ścisłej monotoniczności F? A w przypadku nieciągłej dystrybuanty?

4. Niech $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie prawostronnie ciągłą niemalejącą funkcją taką, że $F(\infty) = 1$ oraz $F(-\infty) = 0$. Określmy na $(0,1)$ z miarą Lebesgue'a zmienną losową X wzorem
$$X(s) := \sup\{t \in \mathbb{R} \colon F(t) \leqslant s\}, \quad s \in (0,1).$$
   Wykaż, że X ma dystrybuantę F.

5. Zmienna losowa X ma dystrybuantę
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leqslant t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leqslant t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geqslant \frac{3}{7}. \end{cases}$$
   Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leqslant X \leqslant \frac{3}{7})$.

6. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 2. \end{cases}$$
   Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

7. a) Dla $t \in [0,1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a.
   b) Pokaż, że funkcje Rademachera $r_n(x) := \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a.

8. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Dla skończonych podzbiorów A liczb całkowitych dodatnich zdefiniujmy funkcje Walsha

$$w_A := \begin{cases} \prod_{i \in A} \varepsilon_i & \text{jeśli } A \neq \emptyset, \\ 1 & \text{jeśli } A = \emptyset. \end{cases}$$

a) Znajdź rozkład w_A.
b) Wykaż, że w_A, w_B są niezależne gdy $A \neq B$. Czy w_A, w_B, w_C muszą być niezależne dla różnych indeksów A, B, C?

9* Czy na odcinku $[0, 1]$ istnieją dwie niestałe funkcje ciągłe, będące niezależnymi zmiennymi losowymi względem miary Lebesgue'a? Czy odpowiedź się zmieni, jeśli będziemy chcieli dodatkowo by obie funkcje miały ciągłe pochodne?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 6

(zadania gwiazdkowe do oddania 5 kwietnia)

1. Podaj przykład zmiennej o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuanta jest ściśle rosnąca.

2. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 I_{[0,5]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuantę zmiennej X.

3. Niech X będzie nieujemną „niestarzejącą się zmienną losową”, tzn.

$$\forall_{t,s>0}\ \mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

(zakładamy, że $\mathbb{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t). Udowodnij, że X ma rozkład wykładniczy.

4. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).

5. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1. Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).

6. Znajdź rozkład zmiennej $aX + b$ oraz e^{-X}, gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ.

7. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2, gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

8. Wykaż, że zmienne $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładzie dyskretnym są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(X_1 = u_1, \ldots, X_n = u_n) = \mathbb{P}(X_1 = u_1)\mathbb{P}(X_2 = u_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = u_n)$ dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n$.

9. Wykaż, że zmienne rzeczywiste $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładzie ciągłym z gęstościami odpowiednio $g_1, \ldots, g_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma gęstość g_X daną wzorem $g_X(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)$.

10. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r. Oblicz $\mathbb{P}(X < Y)$.

11. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrami λ i μ.

12. Niech $X_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant n_j, j = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, a f_j funkcjami mierzalnymi na $\mathbb{R}^{n_j}$. Czy zmienne $f_j(X_1^{(j)}, \ldots, X_{n_j}^{(j)})$, $j = 1, 2 \ldots$ muszą być niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

13. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku niemalejącym $X_1^*(\omega) \leqslant X_2^*(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \ldots, n$ (X_k^* nazywamy k-tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \ldots, X_n$).

14* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych. Określmy

$$Y := \limsup_{n\to\infty} X_n, \quad Z := \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Udowodnij, że Y i Z są zdegenerowanymi zmiennymi losowymi, tzn. istnieją $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takie, że $\mathbb{P}(Y = c) = \mathbb{P}(Z = d) = 1$.

15. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

16. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

17. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?

18. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X+Y, X-Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?

19* Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi Bernoulliego, tzn. $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Jaki rozkład ma zmienna $X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\varepsilon_i$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 7
(zadania gwiazdkowe do oddania 19 kwietnia)

1. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

2. W Beer City jest 50 pubów. W każdy weekend klub miłośników piwa odwiedza 3 losowo wybrane puby. Zakładając, że cotygodniowe wybory są dokonywane niezależnie oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby lokali odwiedzonych przynajmniej raz w ciągu 10 kolejnych weekendów.

3. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X.

4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego z parametrem p.

5. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.

6* Rzucamy monetą dopóki liczba wyrzuconych orłów nie będzie równa liczbie wyrzuconych reszek. Niech R oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znajdź rozkład i wartość oczekiwaną R.

7. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.
i) Oblicz $\mathbb{E}|X|^p$ dla $p \in \mathbb{R}$. Ile wynosi ta liczba dla p naturalnych parzystych, a ile dla nieparzystych?
ii) Oblicz $\mathbb{E}\exp(\lambda X)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Jak sie zmieni odpowiedź, gdy X ma rozkład $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$?

8. Udowodnij, że dla dowolnej rzeczywistej zmiennej losowej X,
$$\mathbb{E}|X|^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(|X| \geqslant t)dt.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$,
$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big)^4 \leqslant 3\Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big)^2\Big)^2,$$
gdzie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że stałej 3 nie można poprawić.

10* Niech $S = \sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i$, gdzie (ε_i) są takie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}e^{\lambda S} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \mathbb{E}S^2}$$

i wywnioskuj stąd, że dla $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\Big(|S| \geqslant t(\mathbb{E}S^2)^{1/2}\Big) \leqslant 2e^{-t^2/2}.$$

11* Niech S będzie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla dowolnego $p > 0$ istnieje liczba $C_p < \infty$ zależna tylko od p taka, że

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leqslant C_p(\mathbb{E}|S|^2)^{1/2}$$

12. Rzeczywista zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}(|X| \geqslant t) = 0.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 8

(zadania 8.1 i 8.2 do oddania 26 kwietnia, a 8.9 i 8.10 10 maja)

1* Udowodnij, że dla $\lambda \in (0,1)$ i dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X,

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}X) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$

2* Wykaż, że jeśli zdarzenia A_i są parami niezależne oraz zachodzi $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$, to $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 1$.

3. Mówimy, że zmienna losowa X jest *symetryczna*, jeśli zmienne X i $-X$ mają ten sam rozkład. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) X jest symetryczna,
ii) X ma ten sam rozkład, co εX, gdzie ε jest niezależne od X i $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$,
iii) $\mathbb{E}f(X) = 0$ dla dowolnej nieparzystej, ograniczonej borelowskiej funkcji f.

4. Wykaż, że jeśli X_i są niezależne oraz X_i ma rozkład $\Gamma(\alpha_i, \beta)$, to $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ma rozkład $\Gamma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta)$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

6. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$. Jaki rozkład mają zmienne $X+Y$ oraz X^2+Y^2?

7. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

8. $X_0, X_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $N = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz $\mathbb{E}N$.

9* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Zdefiniujmy

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i, \ k = 1, 2, \ldots.$$

oraz dla $t > 0$,

$$N_t := \sup\{n : S_n \leqslant t\}.$$

Wykaż, że N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt.

10* Udowodnij, że dla $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ zmienna losowa $S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n$ ma ciągłą dystrybuantę, ale nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości) ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 9

1. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(n,p)$, Y ma rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(m,p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X+Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

2. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, zaś Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(Y|X)$.

3. Rzucono kostką najpierw raz, a następnie tyle razy ile oczek wypadło w pierwszym rzucie. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek oraz liczby wyrzuconych trójek.

4. W woreczku znajduje się pewna liczba monet, z których p procent jest sfałszowana, z orłem po obu stronach. Powtarzamy n razy następujące doświadczenie - wyciągamy z woreczka monetę i ją rzucamy, a następnie zwracamy do woreczka. Niech O oznacza liczbę wyrzuconych orłów, zaś F liczbę wylosowań sfałszywanych monet. Wykaż, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p}O$. Ile wynosi $\mathbb{E}(O|F)$?

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
   a) Oblicz $\mathbb{E}(S_n|X_1)$, $\mathbb{E}(S_n^2|X_1)$.
   b) Dla $n \geqslant k$ wyznacz $\mathbb{E}(S_n|S_k)$, $\mathbb{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbb{E}(e^{-S_n}|S_k)$.

6. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które są zależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

7. Załóżmy, że zmienne X, Y przyjmują wartości naturalne oraz
$$\mathbb{P}(X=k, Y=l) = \begin{cases} \frac{1}{l2^l} & \text{dla } 1 \leqslant k \leqslant l \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$
   Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$.

8. Wektor losowy (X,Y) ma gęstość $g(x,y)$. Niech f będzie funckją borelowską taką, że $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{E}(f(X)|Y) = h(Y)$ p.n., gdzie
$$h(y) = \begin{cases} \frac{\int f(x)g(x,y)dx}{\int g(x,y)dx} & \text{jeśli } \int g(x,y)dx > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

9. Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2}e^{-x(y+1)} & \text{jeśli } x>0, y>0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$
   Wyznacz $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X^2)$ oraz $\mathbb{P}(Y>1|X^3+1)$.

10. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X^3|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\max(X,Y)|\min(X,Y))$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 10
(zadania gwiazdkowe do oddania 17 maja)

1. Zmienne $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a X_i mają rozkład jednostajny na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$.

2. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Oblicz $\mathbb{P}(X \in B | X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X | X+Y)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x.
a) Wyznacz rozkład Y.
b) Oblicz $\mathbb{P}(X > r | Y)$.

4* Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, całkowalne i mają jednakowy rozkład. Oblicz $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

5. Dane jest σ-ciało $\mathcal{G}$ oraz zmienne losowe X i Y takie, że zmienna X jest mierzalna względem $\mathcal{G}$, a Y jest niezależna od $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji borelowskiej h takiej, że $\mathbb{E}|h(X,Y)| < \infty$,
$$\mathbb{E}(h(X,Y)|\mathcal{G}) = H(X) \text{ p.n.},$$
gdzie $H(x) = \mathbb{E}h(x,Y)$.

6. Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ z gęstością $f(x,y)$ względem miary Lebesgue'a (czyli $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x,y)dxdy$). Niech $\mathcal{G} = \{A \times \mathbb{R} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Znajdź regularny rozkład warunkowy $\mathbb{P}$ względem $\mathcal{G}$.

7. Niech π będzie regularnym rozkładem warunkowym $\mathbb{P}$ względem $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X,
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_\omega X(\omega')\pi(d\omega', \omega) \quad \text{p.n.}$$

8* Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykaż, że dla dowolnego σ-ciała $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,
a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t|\mathcal{G})dt$ p.n.
b) $\mathbb{P}(X > t|\mathcal{G}) \leqslant t^{-k}\mathbb{E}(X^k|\mathcal{G})$ p.n.

9* Załóżmy, że X jest całkowalną zmienną losową, zaś σ-ciało $\mathcal{G}_2$ jest niezależne od X i σ-ciała $\mathcal{G}_1$. Udowodnij, że
$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) \text{ p.n..}$$

10. Zmienne losowe X, Y i Z są niezależne, przy czym X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, Y jest nieujemną zmienną ograniczoną oraz $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = 1/2$. Oblicz $\mathbb{E}(e^{XY}|Y)$ oraz $\mathbb{E}(e^{XY}|YZ)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 11
(zadania gwiazdkowe do oddania 24 maja)

1. Udowodnij, że $\lim_{p\to\infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty := \mathrm{esssup}|X|$.

2. Udowodnij, że funkcja $f(r) := r \ln \mathbb{E}|X|^{1/r}$ jest wypukła dla $r \in (0, \infty)$.

3* Zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wykaż, że

$$\lim_{p\to 0+} (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} = \|X\|_0 := \exp(\mathbb{E} \ln |X|)$$

(przyjmujemy, że $e^{-\infty} = 0$).

4. Dla $p < 0$ określmy podobnie jak dla $p > 0$, $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ używając dodatkowej konwencji $\infty^\alpha = 0$ dla $\alpha < 0$. Wykaż, że

$$\|X\|_q \leqslant \|X\|_p \quad \text{dla } -\infty < q \leqslant p \leqslant \infty.$$

5. Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ określmy

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mierzalne}\}.$$

Dla $X, Y \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ niech

$$d(X, Y) := \mathbb{E} \min(1, |X - Y|).$$

Wykaż, że zbieżność w metryce d jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

6. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych X_n zbiega do X według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego podciągu da się wybrać podciąg zbieżny do X prawie na pewno.

7* Wykaż, że zbieżność prawie wszędzie jest niemetryzowalna, tzn. nie istnieje metryka na $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, która metryzowałaby zbieżność prawie na pewno.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 12

1. Udowodnij, że dla dowolnych zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y
   a) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$
   b) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon) = 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

2. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + bY$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b.

3. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ oraz f jest funkcją ciągłą, to $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X, Y)$.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..

5. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
   i) według prawdopodobieństwa;
   ii) prawie na pewno;
   iii) w L^2 i $L^{3/2}$.

6. Liczby $p, q > 1$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q (zakładamy, że $X \in L^p$ oraz $Y \in L^q$), to $X_n Y_n$ zbiega do XY w L^1.

7. Zmienne X_n i Y_n są zbieżne p.n. do zmiennych X i Y odpowiednio. Wykaż, że jeśli dla każdego n, zmienna X_n ma ten sam rozkład co zmienna Y_n, to zmienne X i Y mają jednakowy rozkład.

8. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n} \max_{i\leqslant n} |X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

9. Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład taki, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, to
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{wg prawdopodobieństwa.}$$

10. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, $\mathbb{E}X_i = c$ oraz $\sup_i \mathbb{E}X_i^4 < \infty$. Wykaż, że
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to c \quad \text{p.n..}$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 13

(zadania gwiazdkowe do oddania 5 czerwca)

1. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ takie, że X_n ma rozkład jednostajny na $[-n, n]$. Wyznacz wszystkie liczby p dla których szereg $\sum_{n \geqslant 1} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie na pewno.

2. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ oraz $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że $\sum_{n \geqslant 1} X_n$ jest zbieżny p.n. oraz $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{Var}(X_n) = \infty$.

3. Udowodnij, że dla ciągu nieujemnych niezależnych zmiennych losowych X_i, $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \frac{X_i}{1+X_i} < \infty$.

4. Zmienne X_i oraz ε_i są niezależne przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 < \infty$ p.n..

5* Z poprzedniego zadania wynika, że $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varepsilon_n$ jest zbieżny p.w. Czy S ma rozkład ciągły?

6. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $p_n = \mathbb{P}(A_n)$, $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że
$$\frac{N_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \to 0$$
wg prawdopodobieństwa.

7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Pokaż, że ciągi zmiennych losowych
$$a) \ \frac{X_1 X_2 + X_2 X_3 + \ldots + X_n X_{n+1}}{n}, \qquad b) \ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$
są zbieżne prawie na pewno i wyznacz ich granice.

8. Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2023. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych
$$\frac{X_1 X_2 X_3 + X_2 X_3 X_4 + \ldots + X_n X_{n+1} X_{n+2}}{n}$$
jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

9. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnij, że ciąg średnich
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
jest zbieżny prawie na pewno i oblicz jego granicę.

10. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

11* Wykaż, że dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{w } L^1 \text{ przy } n \to \infty.$$

12. Załóżmy, że zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Wykaż, że $N_n/n \to 1$ w L^1 przy $n \to \infty$.

13. Oblicz granice

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + \ldots + x_n} dx_1 \ldots dx_n,$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\, dx_1 \ldots dx_n,$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n,$ gdzie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą,

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{n}{n + x_1 + \ldots + x_n} e^{-(x_1 + \ldots + x_n)} dx_1 \ldots dx_n.$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 14

1. Dla ciągu $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie o skończonej wariancji definiujemy średnią empiryczną $\widehat{m}_n$ i wariancję empiryczną $\widehat{\sigma_n^2}$ wzorami
$$\widehat{m}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \quad \widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{m}_n)^2.$$
Udowodnij, że $\mathbb{E}\widehat{m}_n = \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}\widehat{\sigma_n^2} = \mathrm{Var}(X_1)$ (tzn. $\widehat{m}_n$ i $\widehat{\sigma_n^2}$ są nieobciążonymi estymatorami średniej i wariancji) oraz $\widehat{m}_n \to \mathbb{E}X_1$, $\widehat{\sigma_n^2} \to \mathrm{Var}(X_1)$ prawie na pewno, gdy $n \to \infty$.

2. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie taki, że $\mathbb{E}X_i = \infty$ (tzn $\mathbb{E}X_1^- < \infty$ oraz $\mathbb{E}X_i^+ = \infty$). Udowodnij, że $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to \infty$ prawie na pewno, gdy $n \to \infty$.

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1-p$ dla pewnego $p \in (1/2, 1]$. Wykaż, że $X_1 + \ldots + X_n \to \infty$ prawie na pewno, gdy $n \to \infty$. Co się dzieje, gdy $p = 1/2$?

4. Funkcja rzeczywista f jest ciągła na $[0,1]^2$. Dla $x, y \in [0,1]$ określmy
$$B_{f,n}(x,y) = \sum_{k,l=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\Big)\binom{n}{k}\binom{n}{l}x^k(1-x)^{n-k}y^l(1-y)^{n-l}.$$
Udowodnij, że $B_{f,n}(x,y)$ zbiega jednostajnie do $f(x,y)$ na $[0,1]^2$.

5. Niech X będzie miało rozkład Cauchy'ego. Które z rozkładów zmiennych X, $X/\ln(|X|+e)$, X^2, $\sqrt{|X|}$ spełniają założenia mocnego prawa wielkich liczb, a które słabego?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 15

1. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $0,517$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewczynek.

2. Rzucamy kostką do gry aż do wystąpienia szóstki po raz 50. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że rzucimy co najwyżej 400 razy.

3. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracja po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonuje losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

4. W pewnym mieście w wyborach prezydenckich głosuje 500.000 osób. Zakładając, że wyborcy głosują na każdego z dwu kandydatów losowo i niezależnie z prawdopodobieństwem 50% jaka jest szansa, że różnica między kandydatami będzie mniejsza niż 100 głosów?

5. Pewne biuro badania opinii publicznej planuje zrobić sondaż wyborczy przed wyborami prezydenckimi. Przy założeniu losowego wyboru uczestników sondażu ile musi przepytać osób by z prawdopodobieństwem 0.95 uzyskane w sondażu wyniki poparcia dla poszczególnych kandydatów rózniły się od prawdziwych preferencji wyborczych nie więcej niż o 2 punkty procentowe? Jak zmieni się odpowiedź jeśli biuro bada poparcie kandydatów, których chce wybrać nie więcej niż 10% wyborców?

6. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne i $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$.
   a) Oblicz w zależności od t, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n \leqslant t\sqrt{n})$.
   b) Wykaż, że ciąg $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$ nie jest zbieżny prawie na pewno.

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1/2) = \mathbb{P}(X_i = 2) = 1/2$. Niech $R_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(R_n \leqslant t)$.

8. Prawdopodobieństwo wygrania w pewnej loterii jest równe 10^{-6}. W loterii zagrało 500 tysięcy osób. Jakie jest dokładne prawdopodobieństwo tego, że
   i) ktoś wygrał,
   ii) wygrała więcej niż jedna osoba?
   iii) Oszacuj prawdopodobieństwa z i) i ii).

9. Do pewnej tabeli wpisano $n = 10000$ liczb. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza liczba została błędnie wpisana wynosi $0,005$. Wprowadzone liczby są sprawdzane przez kontrolera, który nie wychwytuje błędu z prawdopodobieństwem $0,02$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że po weryfikacji tabela zawiera przynajmniej dwie błędne liczby.