

Zadania z rachunku prawdopodobieństwa I* - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
 - b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.
2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?
3. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
 - i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
 - ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?
4. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi więcej chłopców niż dziewczynek.
5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
 - a) wszystkie karty różnej wartości;
 - b) dokładnie dwa piki;
 - c) co najmniej dwa piki;
 - d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
 - e) układ 4432;
 - f) układ 4441.
6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
 - a) parę
 - b) dwie pary
 - c) straighta
 - d) trójkę
 - e) fulla
 - f) karete
 - g) kolor
 - h) pokera.
7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
 - a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
 - b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
 - c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.
9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?
10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.
11. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leq n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
 - b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.
12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 2

(zadania gwiazdkowe do oddania 6 marca)

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ takie, że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.
2. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły pod rząd. Znaleźć prawdopodobieństwo, że rzucimy dokładnie k razy.
3. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.
- 4* Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż d rzucono na płaszczyznę poliniowaną jak w poprzednim zadaniu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wielokąt przetnie którąś z linii. Co się dzieje, gdy wielokąt nie jest wypukły?
5. Na kiju długości l wybrano na chybił trafił 2 punkty i w tych punktach przelamano kij. Oblicz prawdopodobieństwo, że z otrzymanych 3 kawałków można zbudować trójkąt.
- 6* Udowodnij, że każde σ -ciało albo ma 2^k elementów dla pewnego k naturalnego albo ma moc przynajmniej continuum.
- 7* Wykaż, że liczba σ -ciał podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$ jest równa $\frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$.
8. Opisz wszystkie przestrzenie probabilistyczne z przeliczalnym zbiorem zdarzeń elementarnych Ω .
9. Udowodnij następujące tożsamości

$$(\limsup A_n)' = \liminf(A_n'), \quad (\liminf A_n)' = \limsup(A_n'),$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \quad \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$

$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n,$$

$$\text{jeśli } A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A, \text{ to } A = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

10. Wykaż, że jeśli $A_n = (-\infty, x_n)$ oraz $x = \limsup x_n$ to $\limsup A_n = (-\infty, x)$ lub $(-\infty, x]$ oraz oba te przypadki mogą zajść.
- 11* Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń probabilistycznych
 - a) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$
 - b*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ dla m nieparzystych
 - c*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ dla m parzystych.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 3

(zadania gwiazdkowe do oddania 13 marca)

1. Udowodnij, że wzór $\rho(A, B) := \mathbb{P}(A\Delta B)$ zadaje pseudometrykę na \mathcal{F} spełniającą warunek trójkąta.
- 2* Załóżmy, że koła rozłączne $B(x_i, r_i)$ są zawarte w pewnym prostokącie oraz pokrywają ten prostokąt z dokładnością do zbioru miary 0. Wykaż, że $\sum_i r_i = \infty$.
- 3* Udowodnij, że nie istnieje prawdopodobieństwo określone na wszystkich podzbiorach \mathbb{Z}_+ takie, że dla wszystkich k , $P(A_k) = 1/k$, gdzie A_k jest zbiorem liczb podzielnych przez k .
4. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
 - a) mamy conajmniej jednego asa
 - b) mamy asa czarnego koloru
 - c) mamy asa pik
 - d) pierwszą wylosowaną kartą jest as
 - e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
 - f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.
5. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
 - a) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$;
 - b) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż $1/4$;
 - c) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż $1/4$.
6. (schemat urnowy Polya) Urna zawiera b kul białych i c kul czarnych. Wykonujemy kolejno następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem do urny, a wraz z nią dokładamy do urny a kul tego samego koloru. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania w n -tym losowaniu kuli białej jest równe $\frac{b}{b+c}$.
7. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?
8. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma

- conajmniej jedną córkę
- dokładnie jedną córkę?
- Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

- Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
 - Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.
 - Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfalszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$?
- W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dylektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów z prawdopodobieństwem $1/10$. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?
- W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w szkole nr 1 potrafi rozłożyć liczbę 2012 na czynniki pierwsze niż w szkole nr 2, podobnie większy procent chłopców z jedynki potrafi to zrobić niż w dwójce. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu 2012 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 4

(zadania gwiazdkowe do oddania 20 marca)

1. Załóżmy, że μ_1 i μ_2 są miarami probabilistycznymi oraz $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ dla $A \in \mathcal{A}$.
 - i) Wykaż, że jeśli \mathcal{A} jest π -układem, to $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ dla $A \in \sigma(\mathcal{A})$.
 - ii) Podaj przykład pokazujący, że teza i) nie musi być prawdziwa, gdy usuniemy założenie o tym, że \mathcal{A} jest π -układem.
2. Dla $A \in \mathcal{F}$ zdefiniujmy $A^1 = A$ i $A^{-1} = A'$. Wykaż, że
 - i) dla dowolnego ciągu znaków $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zdarzenia A_1, \dots, A_n są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne,
 - ii) zdarzenia A_1, \dots, A_n są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu znaków $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1}) \cdots \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}).$$

3. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k -ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n są niezależne.
4. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k -tej kostce wypadła szóstka, $1 \leq k \leq n$ oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń A_1, \dots, A_{n+1} jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia A_1, \dots, A_{n+1} nie są niezależne.
5. Udowodnij, że w definicji niezależności n zdarzeń każde z $2^n - n - 1$ równań jest niezbędne (tzn. jeśli odrzucimy jedno z równań to istnieją zdarzenia zależne spełniające wszystkie pozostałe równania).
6. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.
7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w schemacie Bernoulliego w n próbach i prawdopodobieństwu sukcesu w pojedynczej próbie równym p będzie parzysta liczba sukcesów.
8. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą n razy, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?
9. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
 - a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
 - b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

10. Rzucamy kostką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.
- 11* Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
- a) $\mathbb{P}(X_n \leq a \log_2 n) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$ dla $a < 1$,
 - b) $\mathbb{P}(X_n \leq a \log_2 n) \rightarrow 1$ przy $n \rightarrow \infty$ dla $a > 1$.
12. Wykaż (używając metod probabilistycznych), że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n, m oraz $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q = 1$ zachodzi nierówność $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1$.
- 13* Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą symetryczną. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń A_1, A_2, \dots . Ile wynosi to prawdopodobieństwo, jeśli moneta nie jest symetryczna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 5

(zadania gwiazdkowe do oddania 27 marca)

1. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.
2. Zdarzenia A_1, A_2, \dots są niezależne oraz $\mathbb{P}(A_n) < 1$ dla wszystkich n . Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
 - i) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n ,
 - ii) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n .
- 3* Załóżmy, że X, Y zmienne losowe takie, że X jest $\sigma(Y)$ -mierzalne, tzn. $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$. Udowodnij, że istnieje funkcja mierzalna $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $X = \varphi(Y)$.
4. Zmienna losowa X ma ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantę F . Znajdź rozkład zmiennej $F(X)$. Czy odpowiedź się zmieni, jeśli nie założymy ścisłej monotoniczności F ? A w przypadku nieciągłej dystrybuanty?
5. Niech $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ będzie prawostronnie ciągłą niemalejącą funkcją taką, że $F(\infty) = 1$ oraz $F(-\infty) = 0$. Na odcinku $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a skonstruuj zmienną losową, która ma dystrybuantę F .
6. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leq t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leq t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geq \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{P}(X \geq \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leq X \leq \frac{3}{7})$.

7. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geq 2. \end{cases}$$

Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

8. a) Dla $t \in [0, 1]$ i $n = 1, 2, \dots$ niech $X_n(t)$ oznacza n -tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$.
b) Pokaż, że funkcje Rademachera $r_n(x) = \text{sgn}(\sin(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$.

9. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (zob. zad. 5.). Dla skończonych podzbiorów A liczb całkowitych dodatnich zdefiniujemy funkcje Walsha

$$w_A = \begin{cases} \prod_{i \in A} \varepsilon_i & \text{jeśli } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{jeśli } A = \emptyset \end{cases}$$

- a) znajdź rozkład w_A
b) wykaż, że w_A, w_B są niezależne gdy $A \neq B$. Czy w_A, w_B, w_C muszą być niezależne dla różnych indeksów A, B, C ?
- 10* Czy na odcinku $[0, 1]$ istnieją dwie niestałe funkcje ciągłe, będące niezależnymi zmiennymi losowymi względem miary Lebesgue'a? Czy odpowiedź się zmieni, jeśli będziemy chcieli dodatkowo by obie funkcje miały ciągłe pochodne?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 6

(zadania gwiazdkowe do oddania 3 kwietnia)

1. Podaj przykład zmiennej o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuanta jest ściśle rosnąca.
2. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2I_{[0,5]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuantę zmiennej X .
- 3* Niech X będzie nieujemną „niestarzejącą się zmienną losową”, tzn.

$$\forall_{t,s>0} \mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

(zakładamy, że $\mathbb{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t). Udowodnij, że X ma rozkład wykładniczy.

4. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).
5. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1 . Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).
6. Znajdź rozkład zmiennej $aX + b$ oraz e^{-X} , gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ .
7. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2 , gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.
8. Wykaż, że zmienne X_1, \dots, X_n o rozkładzie dyskretnym są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(X_1 = u_1, \dots, X_n = u_n) = \mathbb{P}(X_1 = u_1)\mathbb{P}(X_2 = u_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = u_n)$ dla dowolnych u_1, \dots, u_n .
9. Wykaż, że zmienne rzeczywiste X_1, \dots, X_n o rozkładzie ciągłym z gęstościami odpowiednio g_1, \dots, g_n są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy $X = (X_1, \dots, X_n)$ ma gęstość g_X daną wzorem $g_X(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)$.
10. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r . Oblicz $\mathbb{P}(X < Y)$.
11. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrami λ i μ .
12. Niech $X_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq n_j, j = 1, 2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, a f_j funkcjami mierzalnymi na \mathbb{R}^{n_j} . Czy zmienne $f_j(X_1^{(j)}, \dots, X_{n_j}^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots$ muszą być niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

13. Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F . Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \dots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ w porządku niemalejącym $X_1^*(\omega) \leq X_2^*(\omega) \leq \dots \leq X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\}$). Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \dots, n$ (X_k^* nazywamy k -tą statystyką porządkową ciągu X_1, \dots, X_n).
- 14* Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych. Określmy
- $$Y := \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n, \quad Z := \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n.$$
- Udowodnij, że Y i Z są zdegenerowanymi zmiennymi losowymi, tzn. istnieją $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takie, że $\mathbb{P}(Y = c) = \mathbb{P}(Z = d) = 1$.
15. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
16. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.
17. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?
18. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X + Y, X - Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?
- 19* Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi Bernoulliego, tzn. $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Jaki rozkład ma zmienna $X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon_i$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 7

(zadania gwiazdkowe do oddania 10 kwietnia)

1. Roztrzępana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X .
2. W Beer City jest 50 pubów. W każdy weekend klub miłośników piwa odwiedza 3 losowo wybrane puby. Zakładając, że cotygodniowe wybory są dokonywane niezależnie oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby lokali odwiedzonych przynajmniej raz w ciągu 10 kolejnych weekendów.
3. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leq N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X .
4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego z parametrem p .
5. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.
- 6* Rzucamy monetą dopóki liczba wyrzuconych orłów nie będzie równa liczbie wyrzuconych reszek. Niech R oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znajdź rozkład i wartość oczekiwaną R .
7. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - i) Oblicz $\mathbb{E}|X|^p$ dla $p \in \mathbb{R}$. Ile wynosi ta liczba dla p naturalnych parzystych, a ile dla nieparzystych?
 - ii) Oblicz $\mathbb{E} \exp(\lambda X)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Jak się zmieni odpowiedź, gdy X ma rozkład $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$?
8. Udowodnij, że dla dowolnej rzeczywistej zmiennej losowej X ,

$$\mathbb{E}|X|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(|X| \geq t) dt.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, \dots, a_n ,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right)^4 \leq 3 \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right)^2 \right)^2,$$

gdzie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że stałej 3 nie można poprawić.

10* Niech $S = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$, gdzie (ε_i) są takie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}e^{\lambda S} \leq e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \mathbb{E}S^2}$$

i wywnioskuj stąd, że dla $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S| \geq t(\mathbb{E}S^2)^{1/2}) \leq 2e^{-t^2/2}.$$

11* Niech S będzie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla dowolnego $p > 0$ istnieje liczba $C_p < \infty$ zależna tylko od p taka, że

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leq C_p (\mathbb{E}|S|^2)^{1/2}$$

12. Rzeczywista zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^p \mathbb{P}(|X| \geq t) = 0.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 8
(zadania gwiazdkowe do oddania 17 kwietnia)

1* Udowodnij, że dla $\lambda \in (0, 1)$ i dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X ,

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}X) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$

2* Wykaż, że jeśli zdarzenia A_i są parami niezależne oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$, to $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 1$.

3. Mówimy, że zmienna losowa X jest *symetryczna*, jeśli zmienne X i $-X$ mają ten sam rozkład. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

- i) X jest symetryczna,
- ii) X ma ten sam rozkład, co εX , gdzie ε jest niezależne od X i $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$,
- iii) $\mathbb{E}f(X) = 0$ dla dowolnej nieparzystej, ograniczonej borelowskiej funkcji f .

4. Wykaż, że jeśli X_i są niezależne oraz X_i ma rozkład $\Gamma(\alpha_i, \beta)$, to $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$.

5. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$ wykaż, że zmienna $\sum_{i=1}^n X_i^2$ ma rozkład $\Gamma(n/2, 2)$ (rozkład ten nazywamy też rozkładem *chi kwadrat o n stopniach swobody* $\chi^2(n)$).

6. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ , a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

7. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Jaki rozkład mają zmienne $X + Y$ oraz $X^2 + Y^2$?

8. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ , znajdź rozkład zmiennej X/Y .

9* Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ . Zdefiniujmy

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

oraz dla $t > 0$,

$$N_t := \sup\{n : S_n \leq t\}.$$

Wykaż, że N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt .

10. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrami h_1 i h_2 . Udowodnij, że $X + Y$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $h_1 + h_2$ (inaczej jeśli X, Y niezależne o standardowym rozkładzie Cauchy'ego, to $h_1X + h_2Y \sim (h_1 + h_2)X$).
11. X_0, X_1, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $N = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz $\mathbb{E}N$.
- 12* Udowodnij, że dla $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ zmienna losowa $S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n$ ma ciągłą dystrybuantę, ale nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości) ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 9

(zadania gwiazdkowe do oddania 15 maja)

1. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $\text{Bin}(n, p)$, Y ma rozkład Bernoulliego $\text{Bin}(m, p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X + Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X + Y)$.
2. Rzucono kostką najpierw raz, a następnie tyle razy ile oczek wypadło w pierwszym rzucie. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek oraz liczby wyrzuconych trójek.
3. W woreczku znajduje się pewna liczba monet, z których p procent jest sfałszowana, z orłem po obu stronach. Powtarzamy n razy następujące doświadczenie - wyciągamy z woreczka monetę i ją rzucamy, a następnie zwracamy do woreczka. Niech O oznacza liczbę wyrzuconych orłów, zaś F liczbę wylosowań sfałszowanych monet. Wykaż, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p}O$. Ile wynosi $\mathbb{E}(O|F)$?
4. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ , niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
 - a) Oblicz $\mathbb{E}(S_n|X_1)$, $\mathbb{E}(S_n^2|X_1)$.
 - b) Dla $n \geq k$ wyznacz $\mathbb{E}(S_n|S_k)$, $\mathbb{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbb{E}(e^{-S_n}|S_k)$.
5. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y , które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.
6. Załóżmy, że zmienne X, Y przyjmują wartości naturalne oraz

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \begin{cases} \frac{1}{l2^l} & \text{dla } 1 \leq k \leq l \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$.

7. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y)$. Niech f będzie funkcją borelowską taką, że $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{E}(f(X)|Y) = h(Y)$ p.n., gdzie

$$h(y) = \begin{cases} \frac{\int f(x)g(x,y)dx}{\int g(x,y)dx} & \text{jeśli } \int g(x,y)dx > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

8. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2}e^{-x(y+1)} & \text{jeśli } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wyznacz $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X^2)$ oraz $\mathbb{P}(Y > 1|X^3 + 1)$.

9. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X^3|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\max(X, Y)|\min(X, Y))$.
10. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Oblicz $\mathbb{P}(X \in B|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X|X+Y)$.
11. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x .
- a) Wyznacz rozkład Y .
- b) Oblicz $\mathbb{P}(X > r|Y)$.
- 12* Zmienne X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne, całkowalne i mają jednakowy rozkład. Oblicz $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.
13. Dane jest σ -ciało \mathcal{G} oraz zmienne losowe X i Y takie, że zmienna X jest mierzalna względem \mathcal{G} , a Y jest niezależna od \mathcal{G} . Wykaż, że dla dowolnej funkcji borelowskiej h takiej, że $\mathbb{E}|h(X, Y)| < \infty$,

$$\mathbb{E}(h(X, Y)|\mathcal{G}) = H(X) \quad \text{p.n.},$$

gdzie $H(x) = \mathbb{E}h(x, Y)$.

14. Niech \mathbb{P} będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ z gęstością $f(x, y)$ względem miary Lebesgue'a (czyli $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x, y) dx dy$). Niech $\mathcal{G} = \{A \times \mathbb{R} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Znajdź regularny rozkład warunkowy \mathbb{P} względem \mathcal{G} .
15. Niech π będzie regularnym rozkładem warunkowym \mathbb{P} względem \mathcal{G} . Wykaż, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X ,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_{\omega} X(\omega') \pi(d\omega', \omega) \quad \text{p.n.}$$

- 16* Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykaż, że dla dowolnego σ -ciała $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,
- a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t|\mathcal{G}) dt$ p.n.
- b) $\mathbb{P}(X > t|\mathcal{G}) \leq t^{-k} \mathbb{E}(X^k|\mathcal{G})$ p.n.
- 17* Załóżmy, że X jest całkowalną zmienną losową, zaś σ -ciało \mathcal{G}_2 jest niezależne od X i σ -ciała \mathcal{G}_1 . Udowodnij, że

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) \quad \text{p.n..}$$

18. Zmienne losowe X, Y i Z są niezależne, przy czym X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, Y jest nieujemną zmienną ograniczoną oraz $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = 1/2$. Oblicz $\mathbb{E}(e^{XY}|Y)$ oraz $\mathbb{E}(e^{XY}|YZ)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 10

(zadania gwiazdkowe do oddania 22 maja)

1. Udowodnij, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty := \text{esssup}|X|$.
2. Udowodnij, że funkcja $f(r) := r \ln \mathbb{E}|X|^{1/r}$ jest wypukła dla $r \in (0, \infty)$.
- 3* Zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wykaż, że

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} = \|X\|_0 := \exp(\mathbb{E} \ln |X|)$$

(przyjmujemy, że $e^{-\infty} = 0$).

4. Dla $p < 0$ określmy podobnie jak dla $p > 0$, $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ używając dodatkowej konwencji $\infty^\alpha = 0$ dla $\alpha < 0$. Wykaż, że

$$\|X\|_q \leq \|X\|_p \quad \text{dla} \quad -\infty < q \leq p \leq \infty.$$

5. Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ określmy

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{mierzalne}\}.$$

Dla $X, Y \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ niech

$$d(X, Y) := \mathbb{E} \min(1, |X - Y|).$$

Wykaż, że zbieżność w metryce d jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

6. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych X_n zbiega do X według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego podciągu da się wybrać podciąg zbieżny do X prawie na pewno.
- 7* Wykaż, że zbieżność prawie wszędzie jest niemetryzowalna, tzn. nie istnieje metryka na $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, która metryzowałaby zbieżność prawie na pewno.
8. Udowodnij, że dla dowolnych zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y
 - a) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$
 - b) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon) = 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$
9. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + bY$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b .
10. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ oraz F jest funkcją ciągłą, to $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X, Y)$.

11. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..
12. Zmienne $(X_n)_{n \geq 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
 - i) według prawdopodobieństwa;
 - ii) prawie na pewno;
 - iii) w L^2 i $L^{3/2}$.
13. Liczby $p, q > 1$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q (zakładamy, że $X \in L^p$ oraz $Y \in L^q$), to $X_n Y_n$ zbiega do XY w L^1 .
14. Zmienne X_n i Y_n są zbieżne p.n. do zmiennych X i Y odpowiednio. Wykaż, że jeśli dla każdego n , zmienna X_n ma ten sam rozkład co zmienna Y_n , to zmienne X i Y mają jednakowy rozkład.
15. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n} \max_{i \leq n} |X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
16. Wykaż, że jeśli zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz mają jednakowy rozkład taki, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, to

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{wg prawdopodobieństwa.}$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 11

(zadania gwiazdkowe do oddania 5 czerwca)

1. Dane są niezależne zmienne losowe X_1, X_2, \dots takie, że X_n ma rozkład jednostajny na $[-n, n]$. Wyznacz wszystkie liczby p dla których szereg $\sum_{n \geq 1} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie na pewno.
2. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ oraz $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Wykaż, że $\sum_{n \geq 1} X_n$ jest zbieżny p.n. oraz $\sum_{n \geq 1} \text{Var}(X_n) = \infty$.
3. Udowodnij, że dla ciągu nieujemnych niezależnych zmiennych losowych X_i , $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \frac{X_i}{1+X_i} < \infty$.
4. Zmienne X_i oraz ε_i są niezależne przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 < \infty$ p.n..
- 5* Z poprzedniego zadania wynika, że $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varepsilon_n$ jest zbieżny p.w. Czy S ma rozkład ciągły?
6. Zdarzenia A_1, A_2, \dots są niezależne oraz $p_n = P(A_n)$, $N_n = \sum_{i=1}^n I_{A_i}$, $n = 1, 2, \dots$. Udowodnij, że

$$\frac{N_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \rightarrow 0$$

wg prawdopodobieństwa.

- 7* Funkcja rzeczywista f jest ciągła na $[0, 1]^2$. Dla $x, y \in [0, 1]$ określmy

$$B_{f,n}(x, y) = \sum_{k,l=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n}{l} x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{n-l}.$$

Udowodnij, że $B_{f,n}(x, y)$ zbiega jednostajnie do $f(x, y)$ na $[0, 1]^2$.

8. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ . Pokaż, że ciągi zmiennych losowych

$$a) \frac{X_1 X_2 + X_2 X_3 + \dots + X_n X_{n+1}}{n}, \quad b) \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$$

są zbieżne prawie na pewno i wyznacz ich granice.

9. Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2019. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 X_2 X_3 + X_2 X_3 X_4 + \dots + X_n X_{n+1} X_{n+2}}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

10. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnij, że ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i oblicz jego granicę.

11. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1 X_2 \dots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

12. Wykaż, że dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n \geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{w } L^1 \text{ przy } n \rightarrow \infty.$$

13. Załóżmy, że zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n . Wykaż, że $N_n/n \rightarrow 1$ w L^1 przy $n \rightarrow \infty$.

14. Oblicz granice

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n,$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \dots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} dx_1 \dots dx_n,$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n,$ gdzie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą,

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{n}{n + x_1 + \dots + x_n} e^{-(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n.$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 12

1. Dla ciągu X_1, X_2, \dots niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie o skończonej wariancji definiujemy średnią empiryczną \widehat{m}_n i wariancję empiryczną $\widehat{\sigma}_n^2$ wzorami

$$\widehat{m}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \widehat{m}_n)^2.$$

Udowodnij, że $\mathbb{E}\widehat{m}_n = \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}\widehat{\sigma}_n^2 = \text{Var}(X_1)$ (tzn. \widehat{m}_n i $\widehat{\sigma}_n^2$ są nieobciążonymi estymatorami średniej i wariancji) oraz $\widehat{m}_n \rightarrow \mathbb{E}X_1$, $\widehat{\sigma}_n^2 \rightarrow \text{Var}(X_1)$ prawie na pewno, gdy $n \rightarrow \infty$.

2. Dany jest ciąg X_1, X_2, \dots niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie taki, że $\mathbb{E}X_i = \infty$ (tzn. $\mathbb{E}X_i^- < \infty$ oraz $\mathbb{E}X_i^+ = \infty$). Udowodnij, że $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \infty$ prawie na pewno, gdy $n \rightarrow \infty$.
3. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$ dla pewnego $p \in (1/2, 1]$. Wykaż, że $X_1 + \dots + X_n \rightarrow \infty$ prawie na pewno, gdy $n \rightarrow \infty$. Co się dzieje, gdy $p = 1/2$?
4. Udowodnij nierówność maksymalną Levy'ego: jeśli X_1, \dots, X_n są niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi, to dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq t\right) \leq 2\mathbb{P}(|S_n| \geq t),$$

gdzie $S_k = X_1 + \dots + X_k$.

5. Niech X, X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi o jednakowym rozkładzie, zaś $\mu \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu \quad \text{przy } n \rightarrow \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy przy $n \rightarrow \infty$ zachodzą dwie zbieżności:

- i) $n\mathbb{P}(|X_i| \geq n) \rightarrow 0$
- ii) $\mathbb{E}X_i I_{|X_i| \leq n} \rightarrow \mu$.

6. Niech X będzie miało rozkład Cauchy'ego. Które z rozkładów zmiennych X , $X/\ln(|X|+e)$, X^2 , $\sqrt{|X|}$ spełniają założenia mocnego prawa wielkich liczb, a które słabego?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 13

1. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0,517. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewczynek.
2. Rzucamy kostką do gry aż do wystąpienia szóstki po raz 50. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że rzucimy co najwyżej 400 razy.
3. Na kampusie uniwersyteckim są dwie restauracje po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonuje losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?
4. W pewnym mieście w wyborach prezydenckich głosuje 500.000 osób. Zakładając, że wyborcy głosują na każdego z dwu kandydatów losowo i niezależnie z prawdopodobieństwem 50% jaka jest szansa, że różnica między kandydatami będzie mniejsza niż 100 głosów?
5. Pewne biuro badania opinii publicznej planuje zrobić sondaż wyborczy przed wyborami prezydenckimi. Przy założeniu losowego wyboru uczestników sondażu ile musi przepytac osób by z prawdopodobieństwem 0.95 uzyskane w sondażu wyniki poparcia dla poszczególnych kandydatów różniły się od prawdziwych preferencji wyborczych nie więcej niż o 2 punkty procentowe? Jak zmieni się odpowiedź jeśli biuro bada poparcie kandydatów, których chce wybrać nie więcej niż 10% wyborców?
6. Zmienne $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ są niezależne i $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$.
 - a) Oblicz w zależności od t , $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n \leq t\sqrt{n})$.
 - b) Wykaż, że ciąg $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}}$ nie jest zbieżny prawie na pewno.
7. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1/2) = \mathbb{P}(X_i = 2) = 1/2$. Niech $R_n = (X_1 X_2 \dots X_n)^{1/\sqrt{n}}$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_n \leq t)$.
8. Prawdopodobieństwo wygrania w pewnej loterii jest równe 10^{-6} . W loterii zagrało 500 tysięcy osób. Jakie jest dokładne prawdopodobieństwo tego, że
 - i) ktoś wygrał,
 - ii) wygrała więcej niż jedna osoba?
 - iii) Oszacuj prawdopodobieństwa z i) i ii).
9. Do pewnej tabeli wpisano $n = 10000$ liczb. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza liczba została błędnie wpisana wynosi 0,005. Wprowadzone liczby są sprawdzane przez kontrolera, który nie wychwytyuje błędu z prawdopodobieństwem 0,02. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że po weryfikacji tabela zawiera przynajmniej dwie błędne liczby.