Trochę zadań kombinatorycznych

1. na ile sposobów można siedmiu stojących na peronie pasażerów umieścić w trzech wagonach?

2. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ umieszczamy 8 nierozróżnialnych wież szachowych tak aby żadne dwie nie biły się. Na ile to można zrobić sposobów? Jak zmieni się liczba sposobów jeśli założymy, że wieże są rozróżnialne?

3. Na ile sposobów można podzielić 24 studentów na dwie dwunastoosobowe grupy podczas kolokwium?

4. Na ile sposobów można wybrać pięcioosobową delegację z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek, tak by w skład delegacji wchodziło więcej chłopców niż dziewczynek?

5. Ile jest możliwości ustawienia 24 osobowej klasy w szeregu tak, by każdy uczeń stał na miejscu o numerze k, gdzie $k \geqslant n-3$, zaś n oznacza numer ucznia na liście w dzienniku.

6. Na ile sposobów można wybrać 13 kart z 52–kartowej talii tak, by w pewnym kolorze mieć 7 kart, zaś w pozostałych po dwie karty?

7. Gramy w pokera talią 24 kartową. Na ile sposobów można otrzymać „z ręki" 5 kart stanowiących
   a) parę
   b) dwie pary
   c) trójkę
   d) fulla
   e) karetę
   f) kolor
   g) pokera?

8. Ile różnych (niekoniecznie sensownych) słów 12 literowych można ułożyć permutując litery słowa DEGRENGOLADA?

9. Na ile sposobów można wybrać trzy różne wierzchołki 12 kąta foremnego by tworzyły one trójkąt prostokątny? A rozwartokątny?

10. Na ile sposobów można rozdać 28 kostek domina czterem graczom?

11. Na ile sposobów można umieścić N listów w N zaadresowanych kopertach tak, by żaden nie trafił do właściwego adresata?

12. Na ile sposobów można ustawić 7 krzeseł białych i 3 czerwone przy okrągłym stole?

13. Ile jest rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$
    a) w liczbach naturalnych
    b) w liczbach całkowitych nieujemnych
    c) w liczbach naturalnych takich, że $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 1
(zadania gwiazdkowe do oddania 22 lutego)

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ takie, że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Opisz wszystkie przestrzenie probabilistyczne z przeliczalnym zbiorem zdarzeń elementarnych Ω.

3*. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne.

4* Wykaż, że liczba σ-ciał podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ jest równa $\frac{1}{e}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}$.

5. Udowodnij następujące tożsamości

$$(\limsup A_n)' = \liminf(A_n'), \quad (\liminf A_n)' = \limsup(A_n'),$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \quad \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$

$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n,$$

$$\text{jeśli } A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A, \text{ to } A = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

6. Wykaż, że jeśli $A_n = (-\infty, x_n)$ oraz $x = \limsup x_n$ to $\limsup A_n = (-\infty, x)$ lub $(-\infty, x]$ oraz oba te przypadki mogą zajść.

7. Udowodnij, że wzór $\rho(A, B) := \mathbb{P}(A\Delta B)$ zadaje pseudometrykę na $\mathcal{F}$ spełniającą warunek trójkąta.

8*. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły pod rząd. Znaleźć prawdopodobieństwo, że rzucimy dokładnie k razy.

9. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

10. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leqslant n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para,
b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.

11*. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

12. W n rozróżnialnych urnach umieszczono w sposób losowy k rozróżnialnych kul. Oblicz prawdopodobieństwo $p_m(k, n)$, że dokładnie m urn pozostanie pustych $0 \leqslant m \leqslant n-1$. (Wskazówka: policz najpierw $p_0(k, n)$).

13. Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń probabilistycznych
a) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$
b*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leqslant \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ dla m nieparzystych
c*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geqslant \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ dla m parzystych.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 2
(zadania gwiazdkowe do oddania 29 lutego)

1. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.

2* Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż d rzucono na płaszczyznę poliniowaną jak w poprzednim zadaniu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wielokąt przetnie którąś z linii. Co się dzieje, gdy wielokąt nie jest wypukły?

3. Na kiju długości l wybrano na chybił trafił 2 punkty i w tych punktach przełamano kij. Oblicz prawdopodobieństwo, że z otrzymanych 3 kawałków można zbudować trójkąt.

4* Załóżmy, że koła rozłączne $B(x_i, r_i)$ są zawarte w pewnym prostokącie oraz pokrywają ten prostokąt z dokładnością do zbioru miary 0. Wykaż, że $\sum_i r_i = \infty$.

5* Udowodnij, że nie istnieje prawdopodobieństwo określone na wszystkich podzbiorach $\mathbb{Z}_+$ takie, że dla wszystkich k, $P(A_k) = 1/k$, gdzie A_k jest zbiorem liczb podzielnych przez k.

6. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
a) mamy conajmniej jednego asa
b) mamy asa czarnego koloru
c) mamy asa pik
d) pierwszą wylosowaną kartą jest as
e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

7. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

8* (schemat urnowy Polya) Urna zawiera b kul białych i c kul czarnych. Wykonujemy kolejno następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem do urny, a wraz z nią dokładamy do urny a kul tego samego koloru. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania w n-tym losowaniu kuli białej jest równe $\frac{b}{b+c}$.

9. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \ldots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma
a) conajmniej jedną córkę
b) dokładnie jedną córkę?
c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

10. Podaj przykład rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ oraz dwu miar probabilistycznych pokrywających się na $\mathcal{A}$, ale nie na $\sigma(\mathcal{A})$.

11. Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.
b) Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfałszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$?

12. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dylektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów z prawdopodobieństwem 1/10. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 3
(zadania gwiazdkowe do oddania 7 marca)

1. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w szkole nr 1 potrafi rozłożyć liczbe 2012 na czynniki pierwsze niż w szkole nr 2, podobnie większy procent chłopców z jedynki potrafi to zrobić niż w dwójce. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu 2012 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

2. Dla $A \in \mathcal{F}$ zdefiniujmy $A^1 = A$ i $A^{-1} = A'$. Udowodnij, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne.

3* Udowodnij, że w definicji niezależności n zdarzeń każde z $2^n - n - 1$ równań jest niezbędne (tzn. jeśli odrzucimy jedno z równań to istnieją zdarzenia zależne spełniające wszystkie pozostałe równania).

4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w schemacie Bernoulliego w n próbach i prawdopodobieństwu sukcesu w pojedynczej próbie równym p będzie parzysta liczba sukcesów.

5. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą n razy, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?

6. Rzucamy wielokrotnie parą symetrycznych kości. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek równa 7 wypadnie przed sumą oczek 8.

7* Wykaż, że jeśli zdarzenia A_i są parami niezależne oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$ to $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 1$.

8. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń A_i?

9. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.

10. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
a) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a < 1$,
b) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 1$ przy $n \to \infty$ dla $a > 1$.

11* Załóżmy, że X, Y zmienne losowe takie, że X jest $\sigma(Y)$-mierzalne, tzn. $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$. Udowodnij, że istnieje funkcja mierzalna $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $X = \varphi(Y)$.

12. Wykaż (używając metod probabilistycznych), że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n, m oraz $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q + 1$ zachodzi nierówność $(1 - p^n)^m + (1 - p^m)^n \geqslant 1$.

13. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą symetryczną. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$.

Twierdzenie Fubiniego i twierdzenie o przedłużaniu miary

1. Załóżmy, że $X = X(\omega_1, \omega_2)$ jest zmienną losową (czyli funkcją mierzalną na) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$. Wykaż, że
i) Jeśli X jest ograniczona lub nieujemna, to dla wszystkich $\omega_1 \in \Omega_1$) funkcja $\omega_2 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$ jest $\mathcal{F}_2$ mierzalna, zaś funkcja $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) d\mathbb{P}_2(\omega_2)$ jest $\mathcal{F}_1$ mierzalna. Ponadto

$$\int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) d\mathbb{P}_2(\omega_2) d\mathbb{P}_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) d\mathbb{P}_1(\omega_1) d\mathbb{P}_2(\omega_2).$$

ii) Wykaż, że teza punktu i) pozostaje prawdziwa, jeśli założenie ograniczoności zastąpimy całkowalnością X względem $\mathbb{P}$.

2. Załóżmy, że $\mathcal{F}_0$ jest ciałem podzbiorów Ω, zaś $\mu\colon \mathcal{F}_0 \to [0, \infty)$ nieujemną skończenie addytywną funkcją zbioru. Zakładamy, że μ jest ciągłe w zerze, tzn. $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, jeśli $(A_n)_{n\geqslant 0}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów z $\mathcal{F}_0$ o pustym przecięciu. Określmy funkcję μ^* na wszystkich podzbiorach Ω wzorem

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \colon\ A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i,\ A_i \in \mathcal{F}_0 \Big\}.$$

Niech ponadto

$$\mathcal{G} = \Big\{ A \subset \Omega \colon\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{B\in\mathcal{F}_0}\ \mu^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon \Big\}.$$

Udowodnij, że
i) $\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leqslant \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$;
ii) $\mu^*(A) = \mu(A)$ dla $A \in \mathcal{F}_0$,
iii) Jeśli $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, gdzie $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępującym ciągiem zbiorów z $\mathcal{F}_0$, to $\mu^*(A \setminus A_n) \to 0$ przy $n \to \infty$,
iv) $\mathcal{G}$ jest sigma-ciałem zawierającym $\mathcal{F}_0$,
v) Jeśli A_1 i A_2 są rozłącznymi zbiorami z $\mathcal{G}$, to $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$,
vi) μ^* obcięta do $\mathcal{G}$ jest skończoną miarą nieujemną.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 4
(zadania gwiazdkowe do oddania 14 marca)

1. Zmienna losowa X ma ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantę F. Znajdź rozkład zmiennej $F(X)$. Czy odpowiedź się zmieni, jeśli nie założymy ścisłej monotoniczności F? A w przypadku nieciągłej dystrybuanty?

2. Niech $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie prawostronnie ciągłą niemalejącą funkcją taką, że $F(\infty) = 1$ oraz $F(-\infty) = 0$. Na odcinku $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a skonstruuj zmienną losową, która ma dystrybuantę F.

3* Wykaż, że dwie ograniczone zmienne losowe X, Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}(X^n Y^m) = \mathbb{E}X^n \mathbb{E}Y^m$ dla dowolnych liczb naturalnych n i m.

4* Czy na odcinku $[0,1]$ istnieją dwie niestałe funkcje ciągłe, będące niezależnymi zmiennymi losowymi względem miary Lebesgue'a?

5. a) Dla $t \in [0,1]$ i $n = 1, 2, \ldots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |.|)$.
b) Pokaż, że funkcje Rademachera $r_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |.|)$.

6. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (zob. zad. 5.). Dla skończonych podzbiorów A liczb całkowitych dodatnich zdefiniujmy funkcje Walsha

$$w_A = \begin{cases} \prod_{i \in A} \varepsilon_i & \text{jeśli } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{jeśli } A = \emptyset \end{cases}$$

a) znajdź rozkład w_A
b) wykaż, że w_A, w_B są niezależne gdy $A \neq B$. Czy w_A, w_B, w_C muszą być niezależne dla różnych indeksów A, B, C?

7. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leqslant t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leqslant t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geqslant \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leqslant X \leqslant \frac{3}{7})$.

8. Niech $X_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant n_j, j = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, a f_j funkcjami mierzalnymi na $\mathbb{R}^{n_j}$. Czy zmienne $f_j(X_1^{(j)}, \ldots, X_{n_j}^{(j)})$, $j = 1, 2 \ldots$ muszą być niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

9. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku rosnącym $X_1^*(\omega) \leqslant X_2^*(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \ldots, n$ (X_k^* nazywamy k-tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \ldots, X_n$).

10* Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych. Określmy

$$Y := \limsup_{n\to\infty} X_n, \quad Z := \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Udowodnij, że Y i Z są zdegenerowanymi zmiennymi losowymi, tzn. istnieją $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takie, że $\mathbb{P}(Y = c) = \mathbb{P}(Z = d) = 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 5
(zadania gwiazdkowe do oddania 21 marca)

1. Wykaż, że zmienne $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładzie dyskretnym są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(X_1 = u_1, \ldots, X_n = u_n) = \mathbb{P}(X_1 = u_1)\mathbb{P}(X_2 = u_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = u_n)$ dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n$.

2. Wykaż, że zmienne rzeczywiste $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładzie ciągłym z gęstościami odpowiednio $g_1, \ldots, g_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma gęstość g_X daną wzorem $g_X(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)$.

3. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r. Oblicz $\mathbb{P}(X < Y)$.

4. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrami λ i μ.

5* Niech X będzie nieujemną „niestarzejącą się zmienną losową”, tzn.

$$\forall_{t,s>0}\ \mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

(zakładamy, że $\mathbb{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t). Udowodnij, że X ma rozkład wykładniczy.

6. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

7. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

8. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).

9. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1. Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).

10* Niech F będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Udowodnij, że jeśli F jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, to X ma rozkład ciągły.

11. Znajdź rozkład zmiennej $aX+b$ oraz e^{-X}, gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ.

12. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2, gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

13. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?

14. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X+Y, X-Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?

15* Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi Bernoulliego, tzn. $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Jaki rozkład ma zmienna $X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\varepsilon_i$?

16* Rzucamy monetą dopóki liczba wyrzuconych orłów nie będzie równa liczbie wyrzuconych reszek. Niech R oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znajdź rozkład i wartość oczekiwaną R.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 6
(zadania gwiazdkowe do oddania 28 marca)

1. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

2. W Beer City jest 50 pubów. W każdy weekend klub miłośników piwa odwiedza 3 losowo wybrane puby. Zakładając, że cotygodniowe wybory są dokonywane niezależnie oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby lokali odwiedzonych przynajmniej raz w ciągu 10 kolejnych weekendów.

3. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X.

4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego z parametrem p.

5. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.

6. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Oblicz $\mathbb{E}|X|^p$ dla $p \in \mathbb{R}$. Ile wynosi ta liczba dla p naturalnych parzystych, a ile dla nieparzystych?

7. Udowodnij, że dla dowolnej rzeczywistej zmiennej losowej X,

$$\mathbb{E}|X|^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(|X| \geqslant t)dt.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$,

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big)^4 \leqslant 3\Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big)^2\Big)^2,$$

gdzie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że stałej 3 nie można poprawić.

9* Niech $S = \sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i$, gdzie (ε_i) są takie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}e^{\lambda S} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2\mathbb{E}S^2}$$

i wywnioskuj stąd, że dla $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\Big(|S| \geqslant t(\mathbb{E}S^2)^{1/2}\Big) \leqslant 2e^{-t^2/2}.$$

10* Niech S będzie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla dowolnego $p > 0$ istnieje liczba $C_p < \infty$ zależna tylko od p taka, że

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leqslant C_p(\mathbb{E}|S|^2)^{1/2}$$

11* Rzeczywista zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{t\to\infty} t^p\mathbb{P}(|X| \geqslant t) = 0.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 7

(zadania gwiazdkowe do oddania 4 kwietnia)

1* Udowodnij, że dla $\lambda \in (0,1)$ i dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X,

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}X) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$

2. Mówimy, że zmienna losowa X jest *symetryczna*, jeśli zmienne X i $-X$ mają ten sam rozkład. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) X jest symetryczna,
ii) X ma ten sam rozkład, co εX, gdzie ε jest niezależne od X i $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$,
iii) $\mathbb{E}f(X) = 0$ dla dowolnej nieparzystej, ograniczonej funkcji f.

3. Wykaż, że jeśli X_i są niezależne oraz X_i ma rozkład $\Gamma(\alpha_i, \beta)$, to $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$.

4. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

5. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$. Jaki rozkład mają zmienne $X+Y$ oraz X^2+Y^2?

6. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

7* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Zdefiniujmy

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i, \ k = 1, 2, \ldots.$$

oraz dla $t > 0$,

$$N_t := \sup\{n : S_n \leqslant t\}.$$

Wykaż, że N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt.

8. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrami h_1 i h_2. Udowodnij, że $X+Y$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $h_1 + h_2$ (inaczej jeśli X, Y niezależne o standardowym rozkładzie Cauchy'ego, to $h_1 X + h_2 Y \sim (h_1 + h_2) X$).

9* $X_0, X_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $N = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz $\mathbb{E}N$.

10* Udowodnij, że dla $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ zmienna losowa $S_\lambda = \sum_{n=1}^\infty \lambda^n \varepsilon_n$ ma ciągłą dystrybuantę, ale nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości) ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 8
(zadania gwiazdkowe do oddania 18 kwietnia)

1* Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że istnieje stała uniwersalna $c > 0$ taka, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
a*) $\mathbb{P}\big(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\big) \geqslant c$
b**) $\mathbb{P}\big(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\big) \geqslant c$.

2* Niech Z będzie zmienną losową Cauchy'ego z parametrem 1. Udowodnij, że zmienne

$$Z_2 = \frac{2Z}{1-Z^2},\ Z_3 = \frac{3Z-Z^3}{1-3Z^2}, \ldots, Z_n = \frac{\binom{n}{1}Z - \binom{n}{3}Z^3 + \binom{n}{5}Z^5 - \ldots}{1 - \binom{n}{2}Z^2 + \binom{n}{4}Z^4 - \ldots}$$

mają rozkład Cauchy'ego.

3. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, zaś Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(Y|X)$.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
a) 0blicz $\mathbb{E}(S_n|X_1)$, $\mathbb{E}(S_n^2|X_1)$.
b) Dla $n \geqslant k$ wyznacz $\mathbb{E}(S_n|S_k)$, $\mathbb{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbb{E}(e^{-S_n}|S_k)$.

5. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

6. Zmienne X i Y są niezależne, a f jest borelowską funkcją dwu zmiennych taką, że $\mathbb{E}|f(X,Y)| < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{E}(f(X,Y)|Y) = g(Y)$ p.n., gdzie $g(y) = \mathbb{E}f(X,y)$.

7. Załóżmy, że zmienne X, Y przyjmują wartości naturalne oraz

$$\mathbb{P}(X=k, Y=l) = \begin{cases} \frac{1}{l2^l} & \text{dla } 1 \leqslant k \leqslant l \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$.

8. Wektor losowy (X,Y) ma gęstość

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2}e^{-x(y+1)} & \text{jeśli } x>0, y>0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$.

9. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Oblicz $\mathbb{E}(\max(X,Y)|\min(X,Y))$ oraz $\mathbb{E}(X^3|X+Y)$.

10* Zmienne losowe X, Y są niezależne o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}(X|X+Y) = \mathbb{E}(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2} \text{ p.n.}$$

11* Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie oraz $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$. Znajdź dla $i, n \geqslant 1$

$$\mathbb{E}(X_i|S_n, S_{n+1}, \ldots) := \mathbb{E}(X_i|\sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 9
(zadania gwiazdkowe do oddania 25 kwietnia)

1. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem X.
a) Znajdź rozkład Y,
b) Oblicz $\mathbb{P}(X > r|Y)$.

2. Niezależne zmienne losoew $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są rozłożone jednostajnie na przedziale $[0, a]$. Oblicz $\mathbb{E}(X_1|\max(X_1, \ldots, X_n))$.

3. Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ z gęstością $f(x, y)$ względem miary Lebesgue'a (czyli $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x, y)dxdy$). Niech $\mathcal{G} = \{A \times \mathbb{R} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Znajdź $\Pi(\cdot|\mathcal{G})$ rozkład warunkowy $\mathbb{P}$ względem $\mathcal{G}$.

4* Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykaż, że dla dowolnego σ-ciała $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,
a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t|\mathcal{G})dt$ p.n.
b) $\mathbb{P}(X > t|\mathcal{G}) \leqslant t^{-k}\mathbb{E}(X^k|\mathcal{G})$ p.n.

5* Zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wykaż, że

$$\lim_{p\to 0+} (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} = \|X\|_0 := \exp(\mathbb{E}\ln|X|)$$

(przyjmujemy, że $e^{-\infty} = 0$).

6. Dla $p < 0$ określmy podobnie jak dla $p > 0$, $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ używając dodatkowej konwencji $\infty^\alpha = 0$ dla $\alpha < 0$. Wykaż, że

$$\|X\|_q \leqslant \|X\|_p \quad \text{dla } -\infty < q \leqslant p \leqslant \infty.$$

7. Udowodnij, że $\lim_{p\to\infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty := \operatorname{esssup}|X|$.

8* Udowodnij, że funkcja $f(r) := r \ln \mathbb{E}|X|^{1/r}$ jest wypukła dla $r \in (0, \infty)$.

9* (Ogólna postać nierówności Chinczyna) Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieje stała $C_{p,q} < \infty$ taka, że dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$,

$$\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big|^p\Big)^{1/p} \leqslant C_{p,q}\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big|^q\Big)^{1/q},$$

gdzie jak zwykle $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ - niezależne zmienne losowe oraz $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 10
(zadania gwiazdkowe do oddania 10 maja)

1. Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ określmy
$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mierzalne}\}.$$
Dla $X, Y \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ niech
$$d(X, Y) := \mathbb{E}\min(1, |X - Y|).$$
Wykaż, że zbieżność w metryce d jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

2* Wykaż, że zbieżność prawie wszędzie jest niemetryzowalna tzn. nie istnieje metryka na $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, która metryzowałaby zbieżność prawie na pewno.

3. Udowodnij, że dla dowolnych zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y
a) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$
b) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ to $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon) = 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$

4. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ to $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + bY$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b.

5. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ oraz F jest funkcją ciągłą, to $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X, Y)$.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..

7. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
i) według prawdopodobieństwa;
ii) prawie na pewno;
iii) w L^2 i $L^{3/2}$.

8. Liczby $p, q >$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q, to $X_n Y_n$ zbiega do XY w L^1.

9. Zmienne X_n i Y_n są zbieżne p.n. do zmiennych X i Y odpowiednio. Wykaż, że jeśli dla każdego n, zmienna X_n ma ten sam rozkład co zmienna Y_n, to zmienne X i Y mają jednakowy rozkład.

10* Udowodnij nierówność Levy'ego: jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi, to dla $t > 0$,
$$\mathbb{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|S_k\| \geqslant t) \leqslant 2\mathbb{P}(\|S_n\| \geqslant t),$$
gdzie $S_k = X_1 + \ldots + X_k$.

11* Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha $(F, \|.\|)$ dla dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność
$$\mathbb{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|S_k\| \geqslant Ct) \leqslant C\mathbb{P}(\|S_n\| \geqslant t),$$
gdzie $S_k = X_1 + \ldots + X_k$.

Twierdzenie Radona-Nikodyma

Przestrzenią Hilberta (nad ciałem liczb rzeczywistych) nazywamy przestrzeń liniową, w której określony jest iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$ spełniający warunki:
i) $|x|^2 := \langle x, x\rangle > 0$ dla $x \neq 0$
ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
iii) przekształcenie $x \mapsto \langle x, y\rangle$ jest liniowe dla wszystkich y,
która jest zupełna względem metryki zadanej przez normę $d(x, y) := |x - y|$.

1. Niech E będzie domknietym wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta. Wykaż, że w E istnieje dokładnie jeden element x taki, że $|x| = \inf\{|y|\colon y \in E\}$.

2. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$ istnieje dokładnie jeden element $z \in M$ taki, że

$$|x - z| = \operatorname{dist}(x, M) = \inf\{|x - y|\colon\ y \in M\}.$$

Ponadto $x - z \perp M$ tzn. $\langle x - z, y\rangle = 0$ dla $x \in M$.

3. Załóżmy, że φ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, wówczas istnieje $y \in \mathcal{H}$ takie, że $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$ dla wszystkich x.
Wskazówka. Niech $M = \operatorname{Ker}(\varphi)$ bez straty ogólności $M \neq \mathcal{H}$. Weźmy $z \perp M$, $z \neq 0$ i $y = z\varphi(z)/|z|^2$.

4. (Twierdzenie Radona-Nikodyma dla miar nieujemnych). Niech μ i ν będą σ-skończonymi miarami na $(X, \mathcal{F})$ takimi, że

$$\mu(A) = 0 \ \Rightarrow\ \nu(A) = 0 \quad \text{dla wszystkich } A \in \mathcal{F}.$$

Wówczas istnieje mierzalna nieujemna funkcja h na X taka, że

$$\nu(A) = \int_A h d\mu \quad \text{dla } A \in \mathcal{F}.$$

Wskazówka. Niech $\rho = \mu + \nu$, $\mathcal{H} = L^2(X, \rho)$ oraz $\varphi(f) = \int f d\nu$. Wówczas $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$, $0 \leqslant g < 1$, ρ p.n. i można przyjąć $h = g/(1 - g)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 11
(zadania gwiazdkowe do oddania 30 maja)

1. Udowodnij, że dla ciągu nieujemnych zmiennych losowych X_i, $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\frac{X_i}{1+X_i} < \infty$.

2 Zmienne X_i oraz ε_i są niezależne przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $\sum \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 < \infty$ p.n..

3* Z poprzedniego zadania wynika, że $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\varepsilon_n$ jest zbieżny p.w. Czy S ma rozkład ciągły?

4* Wykaż, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych X_i o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha szereg $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ jest zbieżny wg prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny p.n..

5. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $p_n = P(A_n)$, $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że

$$\frac{N_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \to 0$$

wg prawdopodobieństwa.

6* Funkcja rzeczywista f jest ciągła na $[0,1]^2$. Dla $x, y \in [0,1]$ określmy

$$B_{f,n}(x,y) = \sum_{k,l=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\Big)\binom{n}{k}\binom{n}{l} x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{n-l}.$$

Udowodnij, że $B_{f,n}(x,y)$ zbiega jednostajnie do $f(x,y)$ na $[0,1]^2$.

7** (Silne prawo wielkich liczb Marcinkiewicza) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi jednakowo rozłożonymi zmiennymi losowymi oraz $0 < p < 2$. Udowodnij, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n^{1/p}} \to 0 \text{ p.n.}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ oraz dodatkowo $\mathbb{E}X = 0$ dla $1 \leqslant p < 2$.

8* Przy założeniach poprzedniego zadania udowodnij, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ p.n.}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $X_i = 0$ p.n..

9. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Pokaż, że ciągi zmiennych losowych

$$a)\ \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}, \quad b)\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$

są zbieżne prawie na pewno i wyznacz ich granice.

10. Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2012. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + \ldots + X_nX_{n+1}X_{n+2}}{n + 2012}$$

jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

11. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnij, że ciąg średnich
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
jest zbieżny prawie na pewno i oblicz jego granicę.

12. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

13. Wykaż, że dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n \geqslant 1}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ ciąg średnich
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{w } L^1 \text{ przy } n \to \infty.$$

14. Załóżmy, że zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Wykaż, że $N_n/n \to 1$ w L^1 przy $n \to \infty$.

15. Oblicz granice
a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + \ldots + x_n} dx_1 \ldots dx_n$;
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} dx_1 \ldots dx_n$;
c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}) dx_1 \ldots dx_n$, gdzie $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 12

1. Niech X będzie miało rozkład Cauchy'ego. Które z rozkładów zmiennych X, $X/\ln(|X|+e)$, X^2, $\sqrt{|X|}$ spełniają założenia mocnego prawa wielkich liczb, a które słabego?

2. Dla ciągu $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie o skończonej wariancji definiujemy średnią empiryczną $\widehat{m}_n$ i wariancję empiryczną $\widehat{\sigma_n^2}$ wzorami

$$\widehat{m}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \quad \widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{m}_n)^2.$$

Udowodnij, że $\mathbb{E}\widehat{m}_n = \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}\widehat{\sigma_n^2} = \mathrm{Var}(X_1)$ (tzn. $\widehat{m}_n$ i $\widehat{\sigma_n^2}$ są nieobciążonymi estymatorami średniej i wariancji) oraz $\widehat{m}_n \to \mathbb{E}X_1$, $\widehat{\sigma_n^2} \to \mathrm{Var}(X_1)$ prawie na pewno, gdy $n \to \infty$.

3. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie taki, że $\mathbb{E}X_i = \infty$ (tzn $\mathbb{E}X_1^- < \infty$ oraz $\mathbb{E}X_i^+ = \infty$). Udowodnij, że $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to \infty$ prawie na pewno, gdy $n \to \infty$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$ dla pewnego $p \in (1/2, 1]$. Wykaż, że $X_1 + \ldots + X_n \to \infty$ prawie na pewno, gdy $n \to \infty$. Co się dzieje, gdy $p = 1/2$?

5. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $0,517$. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewczynek.

6. Rzucamy kostką do gry aż do wystąpienia szóstki po raz 50. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że rzucimy co najwyżej 400 razy.

7. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracja po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonuje losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

8. W pewnym stanie w wyborach prezydenckich głosuje 500.000 osób. Zakładając, że wyborcy głosują na każdego z dwu kandydatów losowo i niezależnie z prawdopodobieństwem 50% jaka jest szansa, że różnica między kandydatami będzie mniejsza niż 100 głosów?

9. Agata rzuciła monetą 100 razy i uzyskała 70 orłów. Jan chce powtórzyć ten wyczyn (tzn. otrzymać 70 lub więcej orłów) i zamierza w tym celu rzucać monetą aż do skutku. Ile średnio serii po 100 rzutów potrzeba, aby się doczekać 70 lub więcej orłów?

10. Pewne biuro badania opinii publicznej planuje zrobić sondaż wyborczy przed wyborami prezydenckimi. Przy założeniu losowego wyboru uczestników sondażu ile musi przepytać osób by z prawdopodobieństwem 0.95 uzyskane w sondażu wyniki poparcia dla poszczególnych kandydatów różniły się od prawdziwych preferencji wyborczych nie więcej niż o 3 punkty procentowe? Jak zmieni się odpowiedź jeśli biuro bada poparcie kandydatów, których chce wybrać nie więcej niż 10% wyborców?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 13

1. Oblicz $\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 4, N_4 = 5)$ oraz $\mathbb{P}(N_1 = N_2 < N_3 - 1)$.

2. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n..

3. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że $N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ jest procesem Poissona.

4. Liczba wyświetleń pewnej strony internetowej do chwili t – N_t jest procesem Poissona z intensywnością λ. Każde wyświetlenie z prawdopodobieństwem p jest dokonywane spoza Polski (niezależnie dla każdego wyświetlenia i niezależnie od procesu N). Niech $N_t^{(1)}$ będzie liczbą wyświetleń strony spoza Polski, a $N_t^{(2)}$ z Polski. Wykaż, że $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona.

5. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem stratującym z zera, przyjmującym wartości całkowite nieujemne, o niezależnych, stacjonarnych przyrostach i prawostronnie ciągłych i niemalejących trajektoriach. Ponadto załóżmy, że
$$\mathbb{P}(X_t = 1) = \lambda t + o(t), \quad \mathbb{P}(X_t \geqslant 2) = o(t) \quad \text{przy } t \to 0+ .$$
Wykaż, że X jest procesem Poissona.

6. (Złożony proces Poissona) Załóżmy, że N jest procesem Poissona, a $Y_1, Y_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, niezależnym od N. Niech
$$X_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_t} Y_k & \text{jeśli } N_t > 0 \\ 0 & \text{jeśli } N_t = 0. \end{cases}$$
Wykaż, że X jest procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

Centralne twierdzenie graniczne

1. Niech f będzie funkcją klasy C^3 o zwartym nośniku.
a) Załóżmy, że zmienne X, Y, Z są niezależne, $\mathbb{E}X = a$ i $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ oraz $Y \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Wykaż, że istnieje stała M zależna tylko od f taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$|\mathbb{E}f(X+Z) - \mathbb{E}f(Y+Z)| \leqslant M(\varepsilon\sigma^2 + \sigma^3 + \mathbb{E}(X-a)^2 I_{|X-a|\geqslant\varepsilon})$$

b) Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, $\mathbb{E}X_i = a_i$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$, zaś $Y \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, gdzie $a = \sum_{i\leqslant n} a_i$ oraz $\sigma^2 = \sum_{i\leqslant n} \sigma_i^2$. Wykaż, że dla $\varepsilon > 0$,

$$|\mathbb{E}f\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) - \mathbb{E}f(Y)| \leqslant M\Big(\varepsilon\sigma^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_i^3 + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i - a_i)^2 I_{|X_i - a_i|\geqslant\varepsilon}\Big).$$

2. (CTG dla zmiennych o jednakowym rozkładzie). Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie ze średnią a i wariancją $\sigma^2 > 0$, zaś $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Niech

$$\tilde{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\Big(\sum_{i=1}^n X_i - na\Big).$$

Wykaż, że
a) dla dowolnej funkcji f klasy C^3 o zwartym nośniku $\mathbb{E}f(\tilde{S}_n) \to \mathbb{E}f(Y)$ przy $n \to \infty$;
b) dla dowolnego t, $\mathbb{P}(\tilde{S}_n \leqslant t) \to \Phi(t)$.

3. (CTG Lindeberga-Lévy'ego). Załóżmy, że dla $n = 1, 2, \ldots$ zmienne $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,k_n}$ są niezależne i spełniają warunki:
i) $\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}X_{n,i} \to 0$
ii) $\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{Var}(X_{n,i}) \to 1$
iii) dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$L_n(\varepsilon) := \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}(X_{n,i} - \mathbb{E}X_{n,i})^2 I_{|X_{n,i} - \mathbb{E}X_{n,i}|\geqslant\varepsilon} \to 0.$$

Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i}$ oraz $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Wykaż, że
a) dla dowolnej funkcji f klasy C^3 o zwartym nośniku $\mathbb{E}f(S_n) \to \mathbb{E}f(Y)$ przy $n \to \infty$;
b) dla dowolnego t, $\mathbb{P}(S_n \leqslant t) \to \Phi(t)$.