Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 1

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ takie, że $P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Opisać wszystkie przestrzenie probabilistyczne z przeliczalnym zbiorem zdarzeń elementarnych Ω

3. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne

4. Udowodnij następujące tożsamości
$$(\limsup A_n)' = \liminf(A_n'), (\liminf A_n)' = \limsup(A_n'),$$
$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$
$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n,$$
$$A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A \text{ to } A = \limsup A_n = \liminf A_n$$

5. Wykaż, że jeśli $A_n = (-\infty, x_n)$ oraz $x = \limsup x_n$ to $\limsup A_n = (-\infty, x)$ lub $(-\infty, x]$ oraz oba te przypadki mogą zajść.

6. Udowodnij, że następujące dwie pseudometryki na $\mathcal{F}$
$$\rho_1(A, B) = P(A\Delta B)$$
$$\rho_2(A, B) = \begin{cases} \frac{P(A\Delta B)}{P(A\cup B)} & \text{jeśli } P(A\cup B) > 0 \\ 0 & \text{jeśli } P(A\cup B) = 0 \end{cases}$$
spełniają warunek trójkąta.

7. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły pod rząd. Znaleźć prawdopodobieństwo, że rzucimy dokładnie k razy.

8. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każy uczeń będzie przepytany.

9. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich $2k$ butów przy czym $2k < n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) wśród wylosowanych butów jest conajmniej jedna para
b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para

10. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

11. W n rozróżnialnych urnach umieszczono w sposób losowy k rozróżnialnych kul. Oblicz prawdopodobieństwo $p_m(k, n)$, że dokładnie m urn pozostanie pustych $0 \leq m \leq n - 1$. (Wskazówka: policz najpierw $p_0(k, n)$).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 2

1. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy jeśli wiadomo, że
a) mamy conajmniej jednego asa
b) mamy asa czarnego koloru
c) mamy asa pik
d) pierwszą wylosowaną kartą jest as
e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

3. K. wybrał się w odwiedziny do znajomych o których wiedział, że mają dwójkę dzieci, ale nie znał ich płci ani wieku. Drzwi domu otworzyła mu dziewczynka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie dziecko znajomych K. też jest dziewczynką?

4. (schemat urnowy Polya) Urna zawiera b kul białych i c kul czarnych. Wykonujemy kolejno następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem do urny, a wraz z nią dokładamy do urny a kul tego samego koloru. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania w n-tym losowaniu kuli białej jest $\frac{b}{b+c}$.

5. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma
a) conajmniej jedną córkę
b) dokładnie jedną córkę?
c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

6. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą aż pojawi się ciąg OOO lub ORO. Jeśli najpierw pojawi się OOO wygrywa gracz A, jeśli ORO gracz B.
a) Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 gra się zakończy
b) Jakie są szanse, że grę wygra gracz A?

7. Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że grę wygra gracz A.
b) Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfałszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 3

1. Na kiju długości l wybrano na chybił trafił 2 punkty i w tych punktach przełamano kij. Oblicz prawdopodobieństwo, że z otrzymanych 3 kawałków można zbudować trójkąt.

2. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo, że igła przetnie którąś z linii.

3. Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż d rzucono na płaszczyznę poliniowaną jak w poprzednim zadaniu. Oblicz prawdopodobieństwo, że wielokąt przetnie którąś z linii.

4. Udowodnij, że w definicji niezależności n zdarzeń każde z $2^n - n - 1$ równań jest niezbędne (tzn. jeśli odrzucimy jedno z równań to istnieją zdarzenia zależne spełniające wszystkie pozostałe równania).

5. Dla $A \in \mathcal{F}$ zdefiniujmy $A^1 = A$ i $A^{-1} = A'$. Udowodnij, że dla dowolnych $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne.

6. Niech $F : R \to [0, 1]$ będzie lewostronnie ciągłą niemalejącą funkcją taką, że $F(\infty) = 1$ oraz $F(-\infty) = 0$. Pokaż, że F jest dystrybuantą pewnej rzeczywistej zmiennej losowej tzn. istnieje przetrzeń probabilistyczna i zmienna X na niej okre´lona takie, że $F(t) = P(X < t)$ dla $t \in R$.

7. Załóżmy, że $(E, \mathcal{B})$ jest przestrzenią mierzalną oraz $\mathcal{A}$ pewną klasą podzbiorów E taką, że $\sigma(A) = \mathcal{B}$. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o wartościach w $(E, \mathcal{B})$ takimi, że $P(X \in A) = P(Y \in A)$ dla wszytkich $A \in \mathcal{A}$. Wykaż, że powyższe założenia nie implikują równości rozkładów X i Y.

8. a) Pokazać, że funkcje Rademachera $r_n(x) = \mathrm{sgn}(\cos(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |.|)$
   b) dla $t \in [0, 1]$ i $n = 1, 2, \dots$ niech $X_n(t)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rowinięć wybieramy np. to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |.|)$.

9. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 4

1. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (por. zad 3.8). Dla skończonych podzbiorów A liczb całkowitych dodatnich zdefiniujmy funkcje Walsha

$$w_A = \begin{cases} \prod_{i \in A} \varepsilon_i & \text{jeśli } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{jeśli } A = \emptyset \end{cases}$$

a) znajdź rozkład w_A
b) wykaż, że w_A, w_B są niezależne gdy $A \neq B$. Czy w_A, w_B, w_C muszą być niezależne dla różnych indeksów A, B, C?

2. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku rosnącym $X_1^*(\omega) \leq X_2^*(\omega) \leq \ldots \leq X_n^*(\omega)$ (czyli w szczegolności $X_1^* = \min(X_1, \ldots, X_n), X_n^* = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \ldots, n$ (X_k^* nazywamy k-tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \ldots, X_n$)

3. Załóżmy, że X, Y zmienne losowe takie, że X jest $\sigma(Y)$-mierzalne tzn. $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$. Udowodnij, że istnieje $\varphi : R \to R$ mierzalna taka, że $X = \varphi(Y)$.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych. Określmy

$$Y = \limsup_{n \to \infty} X_n, Z = \liminf_{n \to \infty} X_n.$$

Udowodnij, że Y i Z są zdegenerowanymi zmiennymi losowymi tzn. istnieją $c, d \in R \cup \{\pm\infty\}$ takie, że $P(X = c) = P(Y = d) = 1$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 5

1. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r. Oblicz $P(X < Y)$.

2. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład eksponencjalny z parametrami λ i μ.

3. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykaż, że $P(X = Y) = 0$.

4. Na skrzyżowaniu ulic na pewnym kierunku światło czerwone świeci się 2 minuty, zaś światło zielone 1 minutę (zakładamy, że nie ma światła żółtego). W losowym momencie samochód przyjeżdża na skrzyżowanie, oznaczmy przez X długość oczekiwania na światło zielone.
a) Znajdź rozkład X
b) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

5. Niech X będzie "niestarzejącą się zmienną losową tzn
$$\forall_{t,s>0} P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$
(zakładamy, że $P(X > t) > 0$ dla wszystkich t). Udowodnij, że X ma rozkład eksponencjalny.

6. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi Bernoulliego tzn. $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Jaki rozkład ma zmienna $X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\varepsilon_i$?

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i)^4 \leq 3(E(\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i)^2)^2,$$
gdzie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ są dobrane jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że stałej 3 nie można poprawić

8. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X.

9. Niech F będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Udowodnij, że jeśli F jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie to X ma rozkład ciągły.

10. Przy oznaczeniach jak w zadaniu 7 wykaż, że dla wszystkich $t \geq 0$
$$P(|\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i| \geq t) \leq 2\exp(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 6

1. a) $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, jaki rozkład ma $bX = c$ dla $b, c \in R$?
   b) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, znajdź rozkład e^X (tzw. rozkład lognormalny).
   c) $X_1, \ldots, X_n$ niezależne zmienne losowe o rozkładach $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, udowodnij, że dla dowolnych liczn rzeczywistych b_i, $\sum_{i=1}^n b_i X_i$ ma rozkład normalny, znajdź parametry tego rozkładu.
   d) X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$, jaki rozkład mają zmienne $X+Y, X-Y$, czy są niezależne?

2. X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ i $\Gamma(\alpha_2, \beta)$. Udowodnij, że $X+Y$ ma rozkład $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Zdefiniujmy $S_0 = 0, S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, \ldots$. Dla $t > 0$ niech $N_t = \sup\{n : S_n \leq t\}$. Wykaż, że N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt.

4. X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie Cauchy'ego z parametrami h_1 i h_2, udowodnij, że $X+Y$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem h_1+h_2 (inaczej jeśli X, Y niezależne o standardowym rozkładzie Cauchy'ego to $h_1 X + h_2 Y \sim (h_1 + h_2)X$).

5. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie eksponencjalnym z parametrami λ i μ, znajdź rozkład zmiennej X/Y.

6. X, Y niezależne zmienne losowe o wartościach w $T = \{z \in C : |z| = 1\}$. Co można powiedzieć o rozkładzie XY jeśli X ma rozkład jednostajny na T.

7. $X_0, X_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkł]adzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $N = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz EN.

8. Udowodnij, że dla $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ rozkład $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n$ nie jest ciągły ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi takimi, że $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$).

9. Niech Z będzie zmienną losową Cauchy'ego z parametrem 1. Udowodnij, że zmienne
$$Z_2 = \frac{2Z}{1-Z^2}, Z_3 = \frac{3Z - Z^3}{1 - 3Z^2}, \ldots, Z_n = \frac{\binom{n}{1}Z - \binom{n}{3}Z^3 + \binom{n}{5}Z^5 - \ldots}{1 - \binom{n}{2}Z^2 + \binom{n}{4}Z^4 - \ldots}, \ldots$$
mają rozkład Cauchy'ego.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 7

1. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leq N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X.

2. W urnie jest N kul w tym $N-1$ białych i 1 czerwona. Gracz ciągnie kule bez zwracania i wygrywa 1 zł za każdą wyciągniętą kulę białą, ale traci wszystko i kończy grę, jeśli wyciągnie kulę czerwoną. Przed każdym losowaniem kuli gracz może zdecydować (oczywiście jeśli nie pojawiła się kula czerwona) czy grać dalej czy zadowolić się dotychczasową wygraną. Znaleźć strategię optymalną tzn maksymalizującą średnią wygraną. Rozwiązać to samo zadanie przy założeniu, że losujemy kule ze zwracaniem.

3. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.

4. Niech X będzie miał rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Oblicz $E|X|^p$ dla $p \in R$, jak wygląda ta liczba dla p naturalnych?

5. X jest rzeczywistą zmienną losową, udowodnij, że
$$E|X|^p = p\int_0^\infty t^{p-1}P(|X| \geq t)dt.$$

6. Rzeczywista zmienna losowa X spełnia $E|X|^p < \infty$, udowodnij, że
$$\lim_{t\to\infty} t^p P(|X| \geq t) = 0.$$

7. (Nierwność Chinczyna) Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi Rademacherami tzn $P(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Udowodnij, że dla dowolnego $p > 0$ istnieje stała $C_p < \infty$ zależna tylko od p taka, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$$(E|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|)^{1/p} \leq C_p\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

8. X jest nieujemną zmienną losowa, udowodnij, że dla $\lambda \in (0,1)$
$$P(X > \lambda EX) \geq (1-\lambda)^2\frac{(EX)^2}{EX^2}.$$

9. Niech (ε_i) będą jak w zadaniu 7. Wykaż, że istnieje stała uniwersalna $c > 0$ taka, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$
a*) pdf$P\big(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geq \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\big) \geq c$
b**) $P\big(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\big) \geq c$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 8

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że
$$E(X|X+Y) = E(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2} \text{ p.w.}$$

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie oraz $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$. Znajdź dla $i, n \geq 1$
$$E(X_i|S_n, S_{n+1}, \ldots) := E(X_i|\sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)).$$

3. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $E(X|Y) = EX$.

4. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} & \text{jeśli } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$
Znajdź $E(X|Y)$.

5. X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1, zaś Y - zmienną losową taką, że jeśli $X = x$ to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem X.
a) Znajdź rozkład Y
b) Oblicz $P(X > r|Y)$.

6. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, a]$, oblicz $E(X_1| \max(X_1, \ldots, X_n))$.

7. Niech P będzie miarą probabilistyczną na $(R^2, (R^2))$ z gęstością $f(x, y)$ względem miary Lebesgue'a (czyli $P(A) = \int_A f(x, y)dxdy$). Niech $\mathcal{G} = \{A \times R : A \in \mathcal{B}(R)\}$. Znajdź $\Pi(\cdot|\mathcal{G})$ rozkład warunkowy P względem $\mathcal{G}$.

8. (Wersja twierdzenia Bayesa dla rozkładów warunkowych) Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podciałem, zaś $\Pi(\cdot|\mathcal{G})$ regularnym rozkładem warunkowym P względem $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla wszystkich $G \in \mathcal{G}, A \in \mathcal{F}$ takich, że $P(A) > 0$ zachodzi
$$P(G|A) = \frac{\int_G \Pi(A|\mathcal{G})(\omega)dP(\omega)}{\int_\Omega \Pi(A|\mathcal{G})(\omega)dP(\omega)}.$$

9. Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podciało. Udowodnij, że
a) $E(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty P(X > t|\mathcal{G})dt$ p.w.
b) $P(X > t|\mathcal{G}) \leq t^{-k} E(X^k|\mathcal{G})$ p.w.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 9

1. X jest zmienną losową taką, że $E|X|^p < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wykaż, że $\lim_{p\to 0+}(E|X|^p)^{1/p} = \|X\|_0 := \exp(E\ln|X|)$ (przyjmujemy, że $e^{-\infty} = 0$).

2. Dla $p < 0$ określmy podobnie jak dla $p > 0$, $\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$ używając dodatkowej konwencji $\infty^\alpha = 0$ dla $\alpha < 0$. Wykaż, że $\|X\|_q \le \|X\|_p$ dla $-\infty < q \le p \le \infty$.

3. Udowodnij, że $\lim_{p\to\infty}\|X\|_p = \|X\|_\infty := \mathrm{esssup}|X|$.

4. Udowodnij, że funkcja $f(r) = r\ln E|X|^{1/r}$ jest wypukła dla $r \in (0,\infty)$.

5. (Ogólna postać nierówności Chinczyna) Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieje stała $C_{p,q} < \infty$ taka, że dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$
$$(E|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|^p)^{1/p} \le C_{p,q}(E|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|^q)^{1/q}$$
($\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ - niezależne zmienne losowe takie, że $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$)

6. Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ określmy $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X; \Omega \to R :$ mierzalne$\}$. Dla $X, Y \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ niech $d_1(X,Y) = E\min(1, |X - Y|)$, $d_2(X,Y) = E\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}$. Wykaż, że metryki d_1 i d_2 są równoważne oraz zbieżność w każdej z tych metryk jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

7. Wykaż, że zbieżność prawie wszędzie jest niemetryzowalna tzn. nie istnieje metryka na $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, która metryzowałaby zbieżność prawie na pewno.

8. Udowodnij, że dla dowolnych zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y
a) jeśli $X_n \xrightarrow{P} X$ i $X_n \xrightarrow{P} Y$ to $P(X = Y) = 1$
b) jeśli $X_n \xrightarrow{P} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} X$ to $lim_{n\to\infty}P(|X_n - Y_n| > \varepsilon) = 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$

9. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{P} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} Y$ to $aX_n + bY_n \xrightarrow{P} aX + bY$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b.

10. Udowodnij nierówność Levy'ego: jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi to dla $t > 0$
$$P(\max_{1\le k\le n}\|S_k\| \ge t) \le 2P(\|S_n\| \ge t),$$
gdzie $S_k = X_1 + \ldots + X_k$.

11. Udowodnij, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha $(E, \|.\|)$ dla dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność
$$P(\max_{1\le k\le n}\|S_k\| \ge Ct) \le CP(\|S_n\| \ge t),$$
gdzie $S_k = X_1 + \ldots + X_k$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 10

1. Udowodnij, że dla ciągu nieujemnych zmiennych losowych X_i, $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ p.w. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} E\frac{X_i}{1+X_i} < \infty$.

2. Zmienne X_i oraz ε_i są niezależne przy czym $P(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $\sum \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.w. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 < \infty$ p.w. (proszę w miarę możliwości udowodnić ten fakt bez odwoływania się do twierdzenia Kołmogorowa o trzech szeregach)

3. Zmienne ε_i są zdefiniowane jak w poprzednim zadaniu, wykaż, że dla liczb rzeczywistych a_i szereg $\sum a_i \varepsilon_i$ jest zbieżny p.w. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum a_i^2 < \infty$.

4. Z poprzedniego zadania wynika, że $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varepsilon_n$ jest zbieżny p.w. Czy S ma rozkład ciągły?

5. Dla $0 < \lambda < 1$ zdefiniujmy zmienną losową $S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n$. Wykaż, że S_λ ma ciągłą dystrybuantę oraz czysto singularny rozkład tzn. istnieje zbiór borelowski A miary Lebesgue'a zero taki, że $P(S_\lambda \in A) = 1$.

6. Wykaż, że dla dowolnych zmiennych losowych X_i o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha E szereg $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ jest zbieżny wg prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny p.w.

7. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne oraz $p_n = P(A_n)$, $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że
$$\frac{N_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \to 0$$
wg prawdopodobieństwa.

8. Funkcja rzeczywista f jest ciągła na $[0,1]^2$. Dla $x, y \in [0,1]$ określmy
$$B_{f,n}(x,y) = \sum_{k,l=0}^{n} f(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) \binom{n}{k} \binom{n}{l} x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{n-l}.$$
Udowodnij, że $B_{f,n}(x,y)$ zbiega jednostajnie do $f(x,y)$ na $[0,1]^2$.

9. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie, $0 \leq X_i < 1$ p.w., udowodnij, że $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \to 0$ p.w.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - 11

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie eksponencjalnym z parametrem λ. Pokazać, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i znaleźć jego granicę.

2. Dla ciągu $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie o skończonej wariancji definiujemy średnią empiryczną $\bar{m}_n$ i dystrybuantę empiryczną $\bar{\sigma}_n^2$ wzorami

$$\bar{m}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{m}_n)^2.$$

Udowodnij, że $E\bar{m}_n = EX_1$, $E\bar{\sigma}_n^2 = V(X_1)$ (tzn. $\bar{m}_n$ i $\bar{\sigma}_n^2$ są nieobciążonymi estymatorami średniej i wariancji) oraz $\bar{m}_n \to EX_1$, $\bar{\sigma}_n^2 \to V(X_1)$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$.

3. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie taki, że $EX_i = \infty$ (tzn $EX_1^- < \infty$ oraz $EX_i^+ = \infty$). Udowodnij, że $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to \infty$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$ dla pewnego $p \in (1/2, 1]$. Wykaż, że $X_1 + \ldots + X_n \to \infty$ prawie na pewno gdy $n \to \infty$. Co się dzieje, gdy $p = 1/2$?

5. (Silne prawo wielkich liczb Marcinkiewicza) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi jednakowo rozłożonymi zmiennymi losowymi oraz $0 < p < 2$. Udowodnij, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n^{1/p}} \to \infty \text{ p.w.}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $E|X|^p < \infty$ oraz dodatkowo $EX = 0$ dla $1 \leq p < 2$.

6. Przy założeniach poprzedniego zadania udowodnij, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \to \infty \text{ p.w.}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $X_i = 0$ p.w..