Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa

9 grudnia 2002

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, ograniczone i mają średnią zero. Udowodnij, że jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|X_n\|_\infty}{s_n} = 0, \text{ gdzie } s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}ar(X_k) \to \infty$$

   to

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{s_n} \to \mathcal{N}(0,1) \text{ według rozkładu gdy } n \to \infty$$

2. Załóżmy, że $X_n \to X$ według rozkładu, zaś $Y_n \to c$ według rozkładu, gdzie c jest stałą. Udowodnij, że $X_n Y_n$ zbiega według rozkladu do cX.

3. Zmienne losowe $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a wszystkie X_i mają jednakowy rozkład $\mathcal{N}(-1,4)$. Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (przyjmujemy, że $S = 0$ gdy $N = 0$).

4. Dane są dwa martyngały X_n i Y_n względem ustalonej filtracji $\mathcal{F}_n$ oraz moment zatrzymania τ taki, że $X_\tau = Y_\tau$ na zbiorze $\{\tau < \infty\}$. Udowodnij, że zmienne Z_n dane wzorem

$$Z_n = Y_n \text{ dla } n > \tau \text{ oraz } Z_n = X_n \text{ dla } n \leqslant \tau$$

   też są martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1,1]$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ oraz $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Znajdź wszystkie liczby $a \neq 0$ dla których $a^n e^{S_n}$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$. Czy otrzymany martyngał jest zbieżny prawie na pewno, a jeśli tak to od jakiej granicy?

6. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ. Udowodnij, że φ jest okresowa z okresem $t_0 > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X \in \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}) = 1$.

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10