

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa

22 kwietnia 2002

1. Zmienne  $X, Y, Z$  są niezależne i mają standardowy rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Czy zmienna  $\arctg(2X + Y - 2Z)$  ma rozkład ciągły? Jeśli tak to znajdź jej gęstość.
2. Zmienne  $X, Y, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  są niezależne, przy czym  $X$  i  $Y$  mają rozkład jednostajny na przedziale  $[0, 2]$ , a  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  symetryczny Bernoulliego tzn.  $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 0.5$ . Znajdź rozkłady zmiennych losowych  $\varepsilon_1 X$  i  $\varepsilon_1 X + \varepsilon_2 Y$ .
3. W pewnej klasie uczy się 20 uczniów. Na każdej lekcji nauczyciel pyta losowo wybranego ucznia (jedna osoba może być wylosowana wiele razy). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 15 kolejnych lekcji żaden z uczniów nie będzie odpowiadał więcej niż jeden raz? Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby różnych uczniów przepytanych w ciągu 15 kolejnych lekcji.
4. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na dwa tysiące daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 2% przypadków (u osoby chorej daje zawsze pozytywną odpowiedź). Jaka jest szansa, że osoba u której test dał odpowiedź pozytywną jest faktycznie chora?
5. Załóżmy, że  $X, Y$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem 1. Oblicz  $E(XY|X)$  oraz  $E(e^{XY}|X)$ .
6. Udowodnij, że dla zmiennej losowej  $X$  o wartościach całkowitych nieujemnych zachodzi

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

oraz

$$EX^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1)P(X \geq n).$$

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10