Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II

4 grudnia 2021, grupa 1 (osoby z nazwiskami zaczynającymi się od liter A-Ł)

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich rozwiązania z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi. Odpowiedzi proszę przedstawiać w jak najprostszej postaci, niektóre z nich mogą wymagać użycia dystrybuanty rozkładu normalnego Φ. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. Rozwiązanie każdego zadania w postaci pliku pdf proszę umieścić w stosownym folderze w moodle'u.

1. Zmienne X_n i Y_n są określone na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przy czym zmienna X_n ma gęstość $\frac{5}{2}n^5x^4 1_{\{|x|\leqslant 1/n\}}$, a zmienne Y_n spełniają warunek
$$\mathbb{P}\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \Big(1 - e^{-\frac{5}{n}}\Big)e^{-\frac{5k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$
Czy wynika stąd, że ciąg $X_n + Y_n$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?
Wsk. Może się przydać fakt, że $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) = 1$.

2. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, a X_i mają rozkład jednostajny na przedziale $[1, 7]$. Niech $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\varepsilon_k X_k$. Czy ciąg $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciasny?

3. Ciąg funkcji charakterystycznych zmiennych losowych X_n spełnia warunek
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \Big(\frac{1}{3}e^{2it} + \frac{2}{3}e^{-it}\Big)e^{-3t^2}.$$
Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 0)$.

4. i) Wykaż, że istnieje zmienna losowa X, której funkcja charakterystyczna wynosi $\varphi_X(t) = e^{-2+2\cos(5t)}$.
ii) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Określmy
$$Y_n := (-1)^n \frac{n-1}{n}(2 + 3X_n) \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$
Czy ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma łączny rozkład gaussowski taki, że $\mathbb{E}X = 1$, $\mathbb{E}Y = -2$, $\mathrm{Var}(X) = 4$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$.
i) Znajdź wszystkie pary liczb a, b takie, że $aX + bY$ jest niezależne od Y.
ii) Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2|Y)$.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II

4 grudnia 2021, grupa 2 (osoby z nazwiskami zaczynającymi się od liter M-Ż)

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich rozwiązania z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi. Można (i warto) korzystać ze wszystkich faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. Rozwiązanie każdego zadania w postaci pliku pdf proszę umieścić w stosownym folderze w moodle'u.

1. Zmienne X_n i Y_n są określone na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przy czym zmienna X_n ma gęstość $\frac{7}{2}n^7x^6 1_{\{|x|\leqslant 1/n\}}$, a zmienne Y_n spełniają warunek
$$\mathbb{P}\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \Big(1 - e^{-\frac{3}{n}}\Big)e^{-\frac{3k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$
Czy wynika stąd, że ciąg $X_n + Y_n$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?
Wsk. Może się przydać fakt, że $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-e^{-x}) = 1$.

2. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, a X_i mają rozkład jednostajny na przedziale $[3, 8]$. Niech $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\varepsilon_k X_k$. Czy ciąg $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciasny?

3. Ciąg funkcji charakterystycznych zmiennych losowych X_n spełnia warunek
$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{X_n}(t) = \Big(\frac{2}{5}e^{-2it} + \frac{3}{5}e^{5it}\Big)e^{-t^2}.$$
Oblicz $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n \geqslant 0)$.

4. i) Wykaż, że istnieje zmienna losowa X, której funkcja charakterystyczna wynosi $\varphi_X(t) = e^{-4+4\cos(3t)}$.
ii) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Określmy
$$Y_n := (-1)^n\frac{n-1}{n}(3 + 5X_n) \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$
Czy ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma łączny rozkład gaussowski taki, że $\mathbb{E}X = -1$, $\mathbb{E}Y = 5$, $\mathrm{Var}(X) = 9$, $\mathrm{Var}(Y) = 1$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$.
i) Znajdź wszystkie pary liczb a, b takie, że $aX + bY$ jest niezależne od Y.
ii) Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2|Y)$.