Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II
gr.I, 1 grudnia 2008

1. Zmienne X_i są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2. Czy ciąg $\frac{(X_1+\ldots+X_n)^2-4n^2}{n\sqrt{n}}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Czas obsługi pojedynczego klienta w kasie ma rozkład wykładniczy ze średnią 4 minuty. Zakładając, że klienci są obsługiwani w sposób niezależny oszacuj prawdopodobieństwo, że w ciągu 6 godzin uda się obsłużyć w kasie co najmniej 100 klientów.

3. Oblicz funkcję charakterystyczną zmiennej $S = \sum_{k=1}^{N+1} X_k$, gdzie X_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze średnią 1 i wariancją 5, a N jest niezależny od $(X_k)_{k\geqslant 1}$ oraz ma rozkład dwumianowy z parametrami $n = 100$ i $p = 1/5$.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Wyznacz wszystkie ciągi a_n takie, że $(e^{2S_n+a_n}, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

5. Funkcje charakterystyczne zmiennych X_n spełniają tożsamość
$$\lim_{n\to\infty} 2t\varphi_{X_n}(t) = \sin(2t) \text{ dla wszystkich } t.$$
Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leqslant t)$.

6. Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że ciąg $((X/2)^n)_{n\geqslant 1}$ jest ciasny.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II

gr.II, 1 grudnia 2008

1. Funkcje charakterystyczne zmiennych X_n spełniają tożsamość

$$\lim_{n\to\infty} 3t\varphi_{X_n}(t) = \sin(3t) \text{ dla wszystkich } t.$$

Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leqslant t)$.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Wyznacz wszystkie ciągi a_n takie, że $(e^{3S_n - a_n}, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

3. Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że ciąg $((2X)^n)_{n\geqslant 1}$ jest ciasny.

4. Oblicz funkcję charakterystyczną zmiennej $S = \sum_{k=1}^{N+1} X_k$, gdzie X_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze średnią 2 i wariancją 3, a N jest niezależny od $(X_k)_{k\geqslant 1}$ oraz ma rozkład dwumianowy z parametrami $n = 200$ i $p = 1/4$.

5. Zmienne X_i są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Czy ciąg $\frac{(X_1+\ldots+X_n)^2 - 9n^2}{n\sqrt{n}}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Czas obsługi pojedynczego klienta w kasie ma rozkład wykładniczy ze średnią 5 minut. Zakładając, że klienci są obsługiwani w sposób niezależny oszacuj prawdopodobieństwo, że w ciągu 8 godzin uda się obsłużyć w kasie co najmniej 100 klientów.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II
gr.III, 1 grudnia 2008

1. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c dla których istnieje zmienna losowa X o funkcji charakterystycznej postaci
$$\varphi_X(t) = ae^{bt^2}(1 + \cos^3(ct)).$$
Oblicz $\mathbf{E}X$ i $\mathrm{Var}(X)$.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots,$ są niezależne oraz X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-3\sqrt{n}, 3\sqrt{n}]$. Czy ciąg $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 2)$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że $(S_n^3 + a_n S_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem?

4. Ilość dziennych wyświetleń pewnej strony internetowej ma rozkład Poissona ze średnią 300 wyświetleń. Zakładając, że wywołania strony w kolejnych dniach są niezależne oszacuj prawdopodobieństwo, że w listopadzie strona zostanie wyświetlona co najwyżej 8800 razy.

5. Wykaż, że zmienne dodatnie X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne $-2\ln X_n$ zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem $1/2$.

6. Wykaż, że $\mathbf{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy funkcja charakterystyczna X jest 2π-okresowa.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II
gr.IV, 1 grudnia 2008

1. Zmienne $X_1, X_2, \ldots,$ są niezależne oraz X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-5\sqrt{n}, 5\sqrt{n}]$. Czy ciąg $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Wykaż, że zmienne dodatnie X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie jednostajnym na $[0,3]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne $-\ln(X_n/3)$ zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.

3. Ilość dziennych wyświetleń pewnej strony internetowej ma rozkład Poissona ze średnią 200 wyświetleń. Zakładając, że wywołania strony w kolejnych dniach są niezależne oszacuj prawdopodobieństwo, że w listopadzie strona zostanie wyświetlona co najwyżej 5900 razy.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,3)$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że $(S_n^3 - a_n S_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem?

5. Wykaż, że $\mathbf{P}(X \in 2\mathbb{Z}) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy funkcja charakterystyczna X jest π-okresowa.

6. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c dla których istnieje zmienna losowa X o funkcji charakterystycznej postaci

$$\varphi_X(t) = ae^{-bt^2}(2 + \cos^3(ct)).$$

   Oblicz $\mathbf{E}X$ i $\mathrm{Var}(X)$.