Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II*

10 grudnia 2012

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Dwaj gracze grają w następującą grę w kości. W pojedynczej grze każdy gracz rzuca raz kostką i ten, który uzyska mniej oczek płaci drugiemu złotówkę, a jeśli na kostkach obu graczy wypadło tyle samo oczek gracze nie zmieniają swoich kapitałów. Na początku gry gracz A ma 10 zł, gracz B ma 5 złotych, gra się kończy, gdy któryś z graczy zostaje bez pieniędzy. Oblicz
   i) prawdopodobieństwo tego, że wygra gracz A,
   ii) wartość oczekiwaną liczby oddanych rzutów.

2. Zmienne $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_n mają rozkład wykładniczy z parametrem 1, a Y_n rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu
$$\frac{X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n}{\sqrt{Y_1^2 + \ldots + Y_n^2}}.$$

3. Wektor (X, Y) ma rozkład gaussowski o średniej zero taki, że $\mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}Y^2 = 4$, $\mathbf{E}XY = 1$. Oblicz
   i) funkcję charakterystyczną wektora (X, Y),
   ii) $\mathbf{E}(X|Y)$ i $\mathbf{E}(X^2|Y)$.

4. Znajdź wszystkie liczby a, b i c takie, że funkcja
$$\varphi(t) = ae^{bt^2}(\cos^2(ct) + 2)$$
jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X.

5. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = -1) = p$ oraz $p \in (0, 1)$, $p \neq 1/2$. Znajdź wszystkie funkcje $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ takie, że $f(S_n)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n. Czy każdy taki martyngał jest zbieżny prawie na pewno?

6. Zmienne X_n są niezależne oraz mają jednakowy rozkład ze średnią zero i wariancją 1. Czy ciąg
$$T_n = \frac{X_1 + \sqrt{2}X_2 + \ldots + \sqrt{n}X_n}{n}$$
jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?