Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II*

14 grudnia 2023, grupa I

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Odpowiedzi należy przedstawiać w jak najprostszej postaci, można w nich używać dystrybuanty zmiennej $\mathcal{N}(0,1)$. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[0,7]$ Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu (Y_n) danego wzorem
$$Y_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} + n \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

2. Dla każdego n zmienne X_n oraz Y_n są niezależne.
i) Czy z ciasności ciągu $(X_n + Y_n)$ wynika ciasność ciągu (X_nY_n)?
ii) Czy odpowiedź się zmieni, jeśli dodatkowo założymy, że zmienne X_n i Y_n są symetryczne?

3. Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że jeśli Y jest zmienną $\mathcal{N}(0,1)$ niezależną od X, to $5X + Y - 2$ ma ten sam rozkład, co $X + 4Y$.

4. Ciąg funkcji charakterystycznych zmiennych losowych X_n spełnia warunek
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \frac{1}{4}\cos(5t) + \frac{3}{4}e^{3it-2t^2}$$
Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant 1)$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz
$$\mathbb{P}(X_k = 3k^{2/3}) = \mathbb{P}(X_k = -3k^{2/3}) = \frac{1}{2}k^{-1/3}, \quad \mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - k^{-1/3}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
Określmy
$$S_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n), \quad T_n := \frac{1}{n}(X_1 - X_2 + X_3 + \ldots + (-1)^{n-1}X_n).$$
Czy dwuwymiarowy ciąg zmiennych losowych (S_n, T_n) jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$ startującym z 0 oraz $\tau = \inf\{n\colon\ S_n = 7\}$.
i) Oblicz $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.
ii) Znajdź liczbę $a > 0$ taką, że $e^{3S_n - an}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.
iii) Oblicz $\mathbb{E}e^{-a\tau}$, gdzie a jest liczbą z punktu ii).

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa 1*

14 grudnia 2023, grupa II

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Odpowiedzi należy przedstawiać w jak najprostszej postaci, można w nich używać dystrybuanty zmiennej $\mathcal{N}(0,1)$. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 9]$ Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu (Y_n) danego wzorem
$$Y_n := n \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} + \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

2. Dla każdego n zmienne X_n oraz Y_n są niezależne.
i) Czy z ciasności ciągu $(X_n + Y_n)$ wynika ciasność ciągu $(X_n Y_n)$?
ii) Czy odpowiedź się zmieni, jeśli dodatkowo założymy, że zmienne X_n i Y_n są symetryczne?

3. Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że jeśli Y jest zmienną $\mathcal{N}(0,1)$ niezależną od X, to $3X + Y + 2$ ma ten sam rozkład, co $X + 4Y$.

4. Ciąg funkcji charakterystycznych zmiennych losowych X_n spełnia warunek
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \frac{1}{3}\cos(4t) + \frac{2}{3}e^{-2it-3t^2}$$
Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant 1)$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz
$$\mathbb{P}(X_k = 2k^{2/3}) = \mathbb{P}(X_k = -2k^{2/3}) = \frac{1}{2}k^{-1/3}, \quad \mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - k^{-1/3}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
Określmy
$$S_n := \frac{1}{n}(X_1 - X_2 + X_3 + \ldots + (-1)^{n-1}X_n), \quad T_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n).$$
Czy dwuwymiarowy ciąg zmiennych losowych (S_n, T_n) jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$ startującym z 0 oraz $\tau = \inf\{n\colon\ S_n = 6\}$.
i) Oblicz $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.
ii) Znajdź liczbę $a > 0$ taką, że $e^{4S_n - an}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.
iii) Oblicz $\mathbb{E}e^{-a\tau}$, gdzie a jest liczbą z punktu ii).