Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II*

grupa I, 18 grudnia 2019

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Wektor losowy $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n})$ ma rozkład jednostajny na sympleksie $\Delta_n = \{x \in [0,\infty)^n\colon \sum_{i=1}^n x_i \leqslant 3n\}$. Czy ciąg dwuwymiarowych wektorów losowych $Y_n := (X_{n,1}, X_{n,2})$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych (X_n) jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu zmiennych losowych (Y_n) zbieżnego do zera według rozkładu, ciąg (X_nY_n) zbiega do zera według rozkładu.

3. Zmienna losowa Z jest niezależna od zmiennych X_n i ma rozkład wykładniczy z parametrem 5. Wykaż, że ciąg $(X_n + Z)$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu.

4. Zmienne X_n i Y_n są niezależne oraz mają rozkład Poissona z parametrem $5n$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-5/2}(X_n^3 - Y_n^3)$.

5. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$, startującym z zera. Określmy $\tau = \inf\{n\colon S_n = 10\}$ i połóżmy $T_n = S_n$ dla $n \leqslant \tau$ i $T_n = 5S_n - 40$ dla $n \geqslant \tau$. Wykaż, że T_n jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.

6. Dany jest martyngał M_n o wartościach całkowitych taki, że $M_0 = -3$, $|M_n - M_{n-1}| \leqslant 1$ oraz $\limsup_{n\to\infty} M_n = \infty$ p.n.. Niech $\tau = \inf\{n\colon |M_n| = 7\}$. Znajdź rozkład zmiennej M_τ.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II*

grupa II, 18 grudnia 2019

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Wektor losowy $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n})$ ma rozkład jednostajny na sympleksie $\Delta_n = \{x \in [0, \infty)^n \colon \sum_{i=1}^n x_i \leqslant 2n\}$. Czy ciąg trójwymiarowych wektorów losowych $Y_n := (X_{n,1}, X_{n,2}, X_{n,3})$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych (X_n) jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu zmiennych losowych (Y_n) zbieżnego do zera według rozkładu, ciąg $(X_n Y_n)$ zbiega do zera według rozkładu.

3. Zmienna losowa Z jest niezależna od zmiennych X_n i ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Wykaż, że ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(X_n + Z)$ jest zbieżny według rozkładu.

4. Zmienne X_n i Y_n są niezależne oraz mają rozkład Poissona z parametrem $3n$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-5/2}(X_n^3 - Y_n^3)$.

5. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$, startującym z zera. Określmy $\tau = \inf\{n\colon\ S_n = 5\}$ i połóżmy $T_n = S_n$ dla $n \leqslant \tau$ i $T_n = 25 - 4S_n$ dla $n \geqslant \tau$. Wykaż, że T_n jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.

6. Dany jest martyngał M_n o wartościach całkowitych taki, że $M_0 = 4$, $|M_n - M_{n-1}| \leqslant 1$ oraz $\limsup_{n\to\infty} M_n = \infty$ p.n.. Niech $\tau = \inf\{n\colon\ |M_n| = 15\}$. Znajdź rozkład zmiennej M_τ.