

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I

gr.I, 26 kwietnia 2007

1. Zdarzenia  $A_i$  są niezależne oraz  $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1/2$ ,  $\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4) = 3/4$ . Oblicz  $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^4 A_i)$  oraz  $\mathbf{P}((A_1 \cup A_2) \setminus (A_3 \cup A_4))$ .
2. W szafce znajduje się 20 par butów. Z szafki na chybił trafił wyciągnięto 16 butów.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wyciągniętych butów nie ma żadnej pary.
  - b) Oblicz wartość oczekiwaną liczby par butów, które znajdują się wśród wyciągniętych butów. (Proszę o podanie dokładnej odpowiedzi liczbowej).
3. Zmienna  $X$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Czy zmienna losowa  $Y = \min(|X|, |X|^2)$  ma rozkład ciągły? W przypadku pozytywnej odpowiedzi proszę podać gęstość.
4. Przypuśćmy, że 10% wszystkich kostek do gry jest sfałszowanych - zawsze wypada na nich szóstka. Wybieramy losowo dwie kostki i rzucamy nimi.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 11 oczek?
  - b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że conajmniej jedna z wybranych kostek była sfałszowana, jeśli wyrzuciliśmy 11 oczek?
5. Zmienna losowa  $X$  ma gęstość  $\frac{1}{4}xI_{[1,3]}(x)$ .
  - a) Oblicz  $\mathbf{P}(|X - 2| \leq 1/2)$  oraz  $\mathbf{E}X$ .
  - b) Znajdź dystrybuantę zmiennej  $Y = \min(X, 2)$ . Czy zmienna  $Y$  ma rozkład ciągły? Jeśli tak, to podaj gęstość.
- 6\* Niech  $X_n$  oznacza najdłuższą serię orłów w  $n$  rzutach monetą (np. dla ciągu OORROROOORO,  $X_{11} = 3$ ). Udowodnij, że
  - a)  $P(X_n \geq \lambda \log_2 n) \rightarrow 0$  dla  $\lambda > 1$ ,
  - b)  $P(X_n \geq \lambda \log_2 n) \rightarrow 1$  dla  $0 < \lambda < 1$ .

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I

gr.II, 26 kwietnia 2007

1. Przypuśćmy, że 20% wszystkich kostek do gry jest sfalszowanych - zawsze wypada na nich jedynka. Wybieramy losowo dwie kostki i rzucamy nimi.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 3 oczek?
  - b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że conajmniej jedna z wybranych kostek była sfalszowana, jeśli wyrzuciliśmy w sumie 3 oczka?
2. Zmienna losowa  $X$  ma gęstość  $\frac{1}{12}xI_{[1,5]}(x)$ .
  - a) Oblicz  $\mathbf{P}(|X - 3| \geq 1)$  oraz  $\mathbf{E}X$ .
  - b) Znajdź dystrybuantę zmiennej  $Y = \min(X, 3)$ . Czy zmienna  $Y$  ma rozkład ciągły? Jeśli tak, to podaj gęstość.
3. Zdarzenia  $A_i$  są niezależne oraz  $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 2/3$ ,  $\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4) = 1/2$ . Oblicz  $\mathbf{P}((A_1 \cup A_2) \setminus (A_3 \cup A_4))$  oraz  $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^4 A_i)$ .
4. W szafce znajduje się 16 par butów. Z szafki na chybił trafił wyciągnięto 14 butów.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wyciągniętych butów nie ma żadnej pary.
  - b) Oblicz wartość oczekiwaną liczby par butów, które znajdują się wśród wyciągniętych butów. (Proszę o podanie dokładnej odpowiedzi liczbowej).
5. Zmienna  $X$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Czy zmienna losowa  $Z = \min(|X|, |X|^4)$  ma rozkład ciągły? W przypadku pozytywnej odpowiedzi proszę podać gęstość.
- 6\* Niech  $X_n$  oznacza najdłuższą serię orłów w  $n$  rzutach monetą (np. dla ciągu OORROROOORO,  $X_{11} = 3$ ). Udowodnij, że
  - a)  $P(X_n \geq \lambda \log_2 n) \rightarrow 0$  dla  $\lambda > 1$ ,
  - b)  $P(X_n \geq \lambda \log_2 n) \rightarrow 1$  dla  $0 < \lambda < 1$ .