

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa 1*

21 kwietnia 2023, grupa I

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Odpowiedzi należy przedstawiać w jak najprostszej postaci. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach.

1. W urnie znajduje się 20 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 20. Losujemy z urny 10 kul ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) najmniejszą liczbą na wylosowanych kulach jest 5,
 - b) numery wylosowanych kul tworzą ciąg ściśle monotoniczny,
 - c) numery wylosowanych kul tworzą ciąg monotoniczny.
2. Pewien matematyk przygotowuje artykuł do druku. Liczba misprintów przed korektą ma rozkład Poissona ze średnią 5. W czasie korekty każdy błąd jest poprawiany z prawdopodobieństwem $3/5$. Zakładamy, że błędy są poprawiane w sposób niezależny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) po korekcie artykuł ma dokładnie jeden błąd,
 - b) po korekcie artykuł ma przynajmniej jeden błąd,
 - c) przed korektą artykuł miał przynajmniej jeden błąd, jeśli po korekcie w artykule nie ma błędów.
3. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, a_n]$ dla pewnego $a_n > 0$. Wykaż, że następujące dwa warunki są równoważne:
 - (i) $\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$,
 - (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$.
4. Zmienna X ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją 5.
 - a) Znajdź rozkłady zmiennych $Y = \text{sgn}(X)$ oraz $Z = X^6$.
 - b) Czy zmienne Y i Z są niezależne?
5. Na pewnym skrzyżowaniu światło zielonie świeci się przez 20 sekund, a czerwone przez 40 sekund. Pan Abacki przyszedł na skrzyżowanie w losowym momencie. Niech T oznacza czas oczekiwania (w sekundach) przez pana Abackiego na zielone światło. Wyznacz dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję T .
6. Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, zaś X liczbą tych $k \in \{1, \dots, n-1\}$ dla których $\pi(k+1) > \pi(k)$. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X .

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa 1*

21 kwietnia 2023, grupa II

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Odpowiedzi należy przedstawiać w jak najprostszej postaci. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach.

1. W urnie znajduje się 25 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 25. Losujemy z urny 10 kul ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) najmniejszą liczbą na wylosowanych kulach jest 7,
 - b) numery wylosowanych kul tworzą ciąg ściśle monotoniczny,
 - c) numery wylosowanych kul tworzą ciąg monotoniczny.
2. Pewien matematyk przygotowuje artykuł do druku. Liczba misprintów przed korektą ma rozkład Poissona ze średnią 6. W czasie korekty każdy błąd jest poprawiany z prawdopodobieństwem $2/3$. Zakładamy, że błędy są poprawiane w sposób niezależny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) po korekcie artykuł ma przynajmniej jeden błąd,
 - b) po korekcie artykuł ma dokładnie jeden błąd,
 - c) przed korektą artykuł miał przynajmniej jeden błąd, jeśli po korekcie w artykule nie ma błędów.
3. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, a_n]$ dla pewnego $a_n > 0$. Wykaż, że następujące dwa warunki są równoważne:
 - (i) $\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$,
 - (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$.
4. Zmienna X ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją 10.
 - a) Znajdź rozkłady zmiennych $Y = X^8$ oraz $Z = \text{sgn}(X)$.
 - b) Czy zmienne Y i Z są niezależne?
5. Na pewnym skrzyżowaniu światło zielonie świeci się przez 15 sekund, a czerwone przez 25 sekund. Pan Abacki przyszedł na skrzyżowanie w losowym momencie. Niech T oznacza czas oczekiwania (w sekundach) przez pana Abackiego na zielone światło. Wyznacz dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję T .
6. Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, zaś X liczbą tych $k \in \{2, \dots, n\}$ dla których $\pi(k) < \pi(k-1)$. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X .