

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I*

grupa I, 24 kwietnia 2019

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne X, Y, Z są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 9. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) := \mathbb{E} \exp(t(X + Y - 2Z)^2) < \infty?$$

Oblicz wartość $f(t)$ w punktach skończoności.

2. Klasę liczącą 22 chłopców i 18 dziewczynek podzielono w sposób losowy na 10 grup czteroosobowych. Niech N oznacza liczbę grup złożonych z dwóch chłopców i dwóch dziewczynek. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję N .
3. Zmienne δ, X i Y są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(\delta = 1) = 1 - \mathbb{P}(\delta = 0) = 2/3$, X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 5]$, a Y rozkład wykładniczy z parametrem 1. Spośród zmiennych losowych $3\delta + X$, δX^2 oraz $X + Y$ wskaż te które mają rozkład ciągły i wyznacz ich gęstość.
4. Niech f będzie losowo wybraną funkcją z $\{1, \dots, 8\}$ w $\{1, 2, \dots, 16\}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - i) $f(5) = 7$,
 - ii) $f(2) < f(5)$,
 - iii) f przyjmuje wartość 4.
5. Liczba jajeczek złożonych przez owada ma rozkład Poissona z parametrem 6. Z każdego jajeczka (niezależnie od pozostałych jajeczek) z prawdopodobieństwem $1/2$ wykluwa się owad.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyklucia się dokładnie k owadów?
 - b) Wiemy, że z jajeczek wykluły się 4 owady. Jakie jest prawdopodobieństwo, że owad złożył więcej niż 4 jajeczka?
6. Znajdź ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ taki, że dla każdej zmiennej losowej X o wartościach całkowitych

$$\mathbb{E}X^4 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbb{P}(|X| \geq n).$$

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I*

grupa II, 24 kwietnia 2019

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne δ , X i Y są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(\delta = 1) = 1 - \mathbb{P}(\delta = 0) = 1/4$, X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 3]$, a Y rozkład wykładniczy z parametrem 1. Spośród zmiennych losowych $X + Y$, δX^2 oraz $2\delta + X$ wskaż te które mają rozkład ciągły i wyznacz ich gęstość.
2. Liczba jajeczek złożonych przez owada ma rozkład Poissona z parametrem 5. Z każdego jajeczka (niezależnie od pozostałych jajeczek) z prawdopodobieństwem 0.8 wykluwa się owad.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyklucia się dokładnie k owadów?
 - b) Wiemy, że z jajeczek wykluły się 3 owady. Jakie jest prawdopodobieństwo, że owad złożył więcej niż 3 jajeczka?
3. Zmienne X , Y , Z są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 2 i wariancji 4. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) := \mathbb{E} \exp(t(2X + Y - 3Z)^2) < \infty?$$

Oblicz wartość $f(t)$ w punktach skończoności.

4. Klasę liczącą 20 chłopców i 16 dziewczynek podzielono w sposób losowy na 12 grup trzyosobowych. Niech N oznacza liczbę grup złożonych z samych chłopców. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję N .
5. Znajdź ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ taki, że dla każdej zmiennej losowej X o wartościach całkowitych

$$\mathbb{E}|X|^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbb{P}(|X| \geq n).$$

6. Niech f będzie losowo wybraną funkcją z $\{1, \dots, 10\}$ w $\{1, 2, \dots, 15\}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - i) $f(3) = 2$,
 - ii) $f(3) < f(5)$,
 - iii) f przyjmuje wartość 8.