Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa

11 grudnia 2000

1. Załóżmy, że $X_n \to X$ według rozkładu, zaś $Y_n \to c$ według rozkładu, gdzie c jest stałą. Udowodnij, że $X_n Y_n$ zbiega według rozkladu do cX.

2. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej u
$$P(X = u) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} e^{-iut} \varphi(t) dt.$$

3. Zmienne losowe $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a wszystkie X_i mają jednakowy rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (przyjmujemy, że $S = 0$ gdy $N = 0$).

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład taki, że $EX_i = 0, EX_i^2 = 1$. Dany jest ciąg a_n spełniający warunek
$$\lim_{n \to \infty} s_n^{-1} \max_{k \leq n} |a_k| = 0, \text{ gdzie } s_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$
Wykaż, że
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k X_k}{s_n} \to \mathcal{N}(0, 1) \text{ według rozkładu.}$$

5. Dane są dwa martyngały X_n i Y_n względem ustalonej filtracji $\mathcal{F}_n$ oraz moment zatrzymania τ taki, że $X_\tau = Y_\tau$. Udowodnij, że zmienne Z_n dane wzorem
$$Z_n = Y_n \text{ dla } n > \tau \text{ oraz } Z_n = X_n \text{ dla } n \leq \tau$$
też są martyngałem.

6. Wykaż, że dla dowolnego martyngału X_n takiego, że $EX_n^2 < \infty$ dla $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi wzór
$$EX_n^2 = EX_0^2 + \sum_{k=1}^{n} E(X_k - X_{k-1})^2.$$

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10