

Kartkówka 3

gr.1, 21 grudnia 2016

1. Dany jest ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n \geq 0}$ o wartościach całkowitych taki, że $X_0 = 3$, $|X_n - X_{n-1}| \leq 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n| = \infty$ p.n. oraz $(X_n^2 - \frac{1}{5}n)$ jest martyngałem względem pewnej filtracji. Niech $\tau = \inf\{n: |X_n| = 7\}$, oblicz $\mathbf{E}\tau$.
2. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 2]$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Znajdź wszystkie liczby a takie, że $e^{S_n + an}$ jest nadmartyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n) .

Kartkówka 3

gr.2, 21 grudnia 2016

1. Dany jest ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n \geq 0}$ o wartościach całkowitych taki, że $X_0 = -1$, $|X_n - X_{n-1}| \leq 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n| = \infty$ p.n. oraz $(X_n^2 - \frac{1}{6}n)$ jest martyngałem względem pewnej filtracji. Niech $\tau = \inf\{n: |X_n| = 8\}$, oblicz $\mathbf{E}\tau$.
2. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 5]$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Znajdź wszystkie liczby a takie, że $e^{S_n - an}$ jest podmartyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n) .

Kartkówka 3

gr.3, 21 grudnia 2016

1. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau$, to dla dowolnego momentu zatrzymania σ względem tej samej filtracji $A \cap \{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$.
2. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{5}$, $\mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{3}{5}$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ oraz

$$\tau = \inf\{n \geq 1: |S_n + 5| = 10\}.$$

Znajdź rozkład S_τ .

Kartkówka 3

gr.4, 21 grudnia 2016

1. Niech σ będzie momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że jeśli $A \in \mathcal{F}_\sigma$, to dla dowolnego momentu zatrzymania τ względem tej samej filtracji $A \cap \{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$.
2. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{2}{5}$, $\mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{1}{5}$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ oraz

$$\tau = \inf\{n \geq 1: |S_n - 3| = 7\}.$$

Znajdź rozkład S_τ .