Kartkówka 3

gr.1, 12 stycznia 2009

1. Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X_k$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie jednostajnym na $[-2, 2]$.
   a) Znajdź ciąg (a_n) taki, że $S_n^2 - a_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
   b) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno?

2. Niech X_n będzie symetrycznym błądzeniem po prostej. Wykaż, że $X_n \bmod 4$ jest łańcuchem Markowa i znajdź macierz przejścia dla tego łańcucha.

Kartkówka 3

gr.2, 12 stycznia 2009

1. Niech X_n będzie symetrycznym błądzeniem po prostej. Wykaż, że $X_n \bmod 3$ jest łańcuchem Markowa i znajdź macierz przejścia dla tego łańcucha.

2. Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3/2} X_k$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie jednostajnym na $[-1, 1]$.
   a) Znajdź ciąg (a_n) taki, że $S_n^2 - a_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
   b) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno?

Kartkówka 3

gr.3, 12 stycznia 2009

1. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.
   a) Znajdź takie $\lambda > 0$, że $\lambda^n e^{S_n/2}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
   b) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno? A w L^1?

2. (X_n) jest jednorodnym łańcuchem Markowa o wartościach całkowitych. Które z następujących ciągów muszą być łańcuchami Markowa (X_n^2), (X_{n+2}), (X_n^3), (X_{2n})?

Kartkówka 3

gr.4, 12 stycznia 2009

1. (X_n) jest jednorodnym łańcuchem Markowa o wartościach całkowitych. Które z następujących ciągów muszą być łańcuchami Markowa (X_n^3), (X_{2n}), (X_n^4), (X_{n+4})?

2. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.
   a) Znajdź takie $\lambda > 0$, że $\lambda^n e^{S_n/3}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
   b) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno? A w L^1?