KARTKÓWKA 3 grupa I , 5 grudnia 2000

1. Zmienne losowe $Y, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne przy czym Y ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{3}$ (tzn. $P(Y=k) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$), a wszystkie X_i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 2)$. Znajdź funkcje charakterystyczną zmiennej $S = \sum_{n=1}^{Y} X_n$.

2. Jan z Agatą regularnie grywają w pewną grę. W pojedynczej grze z prawdopodobieństwem 0.5 wygrywa Jan, z prawdopodobieństwem 0.3 Agata, zaś z prawdopodobieństwem 0.2 gra się kończy remisem. Zakładając niezależność wyników kolejnych gier, oszacuj prawdopodobieństwo, że w 900 grach Jan odniesie conajmniej 200 zwycięstw więcej od Agaty.

KARTKÓWKA 3 grupa II 5 grudnia 2000

1. Jan z Agatą regularnie grywają w pewną grę. W pojedynczej grze z prawdopodobieństwem 0.2 wygrywa Jan, z prawdopodobieństwem 0.6 Agata, zaś z prawdopodobieństwem 0.2 gra się kończy remisem. Zakładając niezależność wyników kolejnych gier, oszacuj prawdopodobieństwo, że w 800 partiach Agata odniesie conajmniej 300 zwycięstw więcej od Jana.

2. Zmienne losowe $Y, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne przy czym Y ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{2}{3}$ (tzn. $P(Y=k) = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$), a wszystkie X_i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 4)$. Znajdź funkcje charakterystyczną zmiennej $S = \sum_{n=1}^{Y} X_n$.

Krótkie Odpowiedzi

- grupa I:

  1. $$\varphi_S(t) = E_Y E_X e^{it\sum_{n=1}^{Y} X_n} = E_Y(\varphi_{X_1}(t))^Y = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}(\varphi_{X_1}(t))^k = \frac{p\varphi_{X_1}(t)}{1 - q\varphi_{X_1}(t)}$$
  $$= \frac{e^{-t^2}}{3 - 2e^{-t^2}}.$$

  2. Przedstawiamy różnicę między liczbą zwycięstw Jana i Agaty jako $S = \sum_{n=1}^{900} X_i$, gdzie $EX_i = 0.2$, $D^2(X_i) = 0.76$ stąd z Centralnego Twierdzenia Granicznego szacujemy szukane prawdopodobieństwo przez
  $$P(S \geq 200) \sim 1 - \Phi(\frac{2}{3\sqrt{0.76}}) \sim 1 - \Phi(0.76).$$

- grupa II:
  1. Przedstawiamy różnicę między liczbą zwycięstw Agaty i Jana jako $S = \sum_{n=1}^{800} X_i$, gdzie $EX_i = 0.4$, $D^2(X_i) = 0.64$ stąd z Centralnego Twierdzenia Granicznego szacujemy szukane prawdopodobieństwo przez
  $$P(S \geq 300) \sim 1 - \Phi(-\frac{5}{4\sqrt{2}}) \sim 1 - \Phi(-0.88) = \Phi(0.88).$$

  2. $$\varphi_S(t) = E_Y E_X e^{it\sum_{n=1}^{Y} X_n} = E_Y(\varphi_{X_1}(t))^Y = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}(\varphi_{X_1}(t))^k = \frac{p\varphi_{X_1}(t)}{1 - q\varphi_{X_1}(t)}$$
  $$= \frac{2e^{-2t^2}}{3 - e^{-2t^2}}.$$