Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II

16 stycznia 2003

1. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = \sigma^2$. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalnej w 0
$$\sqrt{n}(f(\frac{S_n}{n}) - f(0)) \to \mathcal{N}(0, \sigma^2(f'(0))^2) \text{ według rozkładu,}$$
gdzie jak zwykle $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

2. Wykaż, że zmienne nieujemne X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy gdy zmienne $-\ln X_n$ zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.

3. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej u
$$\mathbf{P}(X = u) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} e^{-iut}\varphi(t)dt.$$

4. W urnie znajduje się 10 kul ponumerowanych cyframi od 0 do 9. Losujemy z urny po jednej kuli ze zwracaniem do momentu aż każda kula zostanie wylosowana przynajmniej jeden raz. Oblicz wartość oczekiwaną
a) liczby losowań
b) sumy cyfr na wylosowanych kulach.

5. Dany jest martyngał $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ taki, że $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$ dla wszystkich n. Połóżmy $d_n = X_n - X_{n-1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz dla ustalonego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniujmy
$$Y_n = a_0X_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k d_k,\ n = 0, 1, \ldots.$$
Wykaż, że
a) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ jest martyngałem
b) $\mathbf{E}Y_n^2 = a_0^2\mathbf{E}X_0^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\mathbf{E}d_k^2$.
c) Jeśli ciąg a_n jest ograniczony oraz martyngał X_n jest zbieżny w L^2 to również Y_n jest zbieżny w L^2.

6. Rozpatrzmy łańcuch Markowa na zbiorze liczb całkowitych z macierzą przejścia $P = (p_{xy})$ daną wzorem

$$p_{0,k} = \frac{1}{3} \text{ dla } k = -1, 0, 1,$$

$$p_{k,k-1} = q, p_{k,k+1} = p \text{ dla } k \leqslant -1,$$

$$p_{k,k-1} = p, p_{k,k+1} = q \text{ dla } k \geqslant 1,$$

gdzie $q = 1 - p$ oraz $p \in (0, 1)$. Wykaż, że łańcuch jest nieprzywiedlny i nieokresowy. Dla jakich wartości p, podany łańcuch jest powracalny?

7. Niech $(W_t)_{t \geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, zaś $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leqslant t)$. Znajdź funkcję $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ taką, że

$$(e^{iW_t + f(t)}, \mathcal{F}_t) \text{ jest martyngałem.}$$

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10, do otrzymania oceny bardzo dobrej wystarczy poprawne rozwiązanie 6 zadań.