Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*
grupa I, 16 czerwca 2008

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązanie. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt.

1. W turnieju siatkówki uczestniczy 8 drużyn, każda gra z każdą jedno spotkanie. Zakładając, że wyniki meczów są od siebie niezależne, nie ma remisów oraz prawdopodobieństwo zwycięstwa każdej z drużyn są jednakowe, oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby drużyn, które wygrają dokładnie 4 mecze.

2. Zmienne X i Y są niezależne o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F. Wykaż, że
$$\mathbf{E}|X-Y| = 2\int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1-F(t))dt.$$

3. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[1,5]$. Zbadaj zbieżność prawie na pewno ciągów $\sqrt[n]{X_1X_2\cdots X_n}$ oraz $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

4. Niezależne zmienne losowe X i Y mają jednakowy rozkład z gęstością $3x^{-4}I_{[1,\infty)}(x)$. Oblicz $\mathbf{E}((X+Y)^2|X)$, $\mathbf{P}(Y \leqslant X|X)$ oraz $\mathbf{E}(X|(X+Y)^2)$.

5. Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, X, Y$ są niezależne przy czym $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ a X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Znajdź rozkład zmiennej $\varepsilon_1 X + \varepsilon_2 Y$.

6. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów co reszek. Udowodnij, że
i) $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$ dla $p \neq 1/2$,
ii) $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$ dla $p = 1/2$.

Część testowa

1. (2pkt) Podaj definicję niezależności rodziny σ-ciał $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$.

2. (4pkt) Zmienne X_i są niezależne i mają jednakowy rozkład z gęstością $g_\alpha(x) = C_\alpha \frac{\ln^\alpha(1+|x|)}{1+x^2}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, a C_α jest pewną stałą. Wówczas
i) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \in$........
ii) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ wg prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \in$........

3. (5pkt) Zmienne X_1, X_2 są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 5. Znajdź gęstość zmiennych losowych

   i) $Y = (X_1 + 2X_2)^2$, $g_Y(x) =$...........................

   ii) $Z = \min\{X_1, X_2\}$, $g_Z(x) =$...........................

4. (4pkt) W szufladzie znajduje się 100 monet - 90 symetrycznych i 10 asymetrycznych na których orzeł wypada dwa razy częściej niż reszka. Z pudełka wylosowano monetę i rzucono nią 3 razy. Prawdopodobieństwo tego, że
   i) wypadła przynajmniej jedna reszka wynosi ....
   ii) moneta jest sfałszowana, jeśli wypadły 3 orły wynosi ....

5. (4pkt) Niezależne zmienne X i Y mają rozkład Poissona z parametrem 2. Oblicz

   i) $\mathbf{E}5^{X-Y} =$............

   ii) $\mathbf{P}(X + Y = 5) =$...............

   iii) $\mathbf{P}(XY = 0) =$................

6. (5pkt) Kostką do gry rzucono 7 razy. Prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wyrzuconych oczek jest parzysty wynosi ...., a tego, że wyrzucono wszystkie możliwe wartości oczek jest równy .... Wartość oczekiwana sumy wyrzuconych oczek jest równa ...., a wariancja sumy oczek wynosi ....

7. (3pkt) Stosując twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a można przybliżyć prawdopodobieństwo tego, że w 100 losowaniach totolotka (6 cyfr z 49) liczba 1 zostanie wylosowana więcej niż 10 razy przez $\Phi(x)$ z $x =$.................

8. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*
grupa II, 16 czerwca 2008

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązanie. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt.

1. Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, X, Y$ są niezależne przy czym $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ a X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 3. Znajdź rozkład zmiennej $\varepsilon_1 X + \varepsilon_2 Y$.

2. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[2,5]$. Zbadaj zbieżność prawie na pewno ciągów $\sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n}$ oraz $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

3. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów co reszek. Udowodnij, że
   i) $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$ dla $p \neq 1/2$,
   ii) $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$ dla $p = 1/2$.

4. W turnieju siatkówki uczestniczy 8 drużyn, każda gra z każdą jedno spotkanie. Zakładając, że wyniki meczów są od siebie niezależne, nie ma remisów oraz prawdopodobieństwo zwycięstwa każdej z drużyn są jednakowe, oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby drużyn, które wygrają dokładnie 3 mecze.

5. Niezależne zmienne losowe X i Y mają jednakowy rozkład z gęstością $4x^{-5} I_{[1,\infty)}(x)$. Oblicz $\mathbf{E}((X+Y)^2|X)$, $\mathbf{P}(Y \leqslant X|X)$ oraz $\mathbf{E}(X|(X+Y)^2)$.

6. Zmienne X i Y są niezależne o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F. Wykaż, że
$$\mathbf{E}|X - Y| = 2\int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1 - F(t))dt.$$

Część testowa

1. (3pkt) Stosując twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a można przybliżyć prawdopodobieństwo tego, że w 150 losowaniach totolotka (6 cyfr z 49) liczba 1 zostanie wylosowana conajmniej 16 razy przez $\Phi(x)$ z $x =$.................

2. (4pkt) Niezależne zmienne X i Y mają rozkład Poissona z parametrem 3. Oblicz

   i) $\mathbf{E}2^{X-Y} =$............

   ii) $\mathbf{P}(X + Y = 7) =$................

   iii) $\mathbf{P}(XY = 0) =$................

3. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach.

4. (4pkt) Zmienne X_i są niezależne i mają jednakowy rozkład z gęstością $g_\alpha(x) = C_\alpha \frac{\ln^\alpha(1+|x|)}{1+x^2}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, a C_α jest pewną stałą. Wówczas
i) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ wg prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \in$........
ii) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \in$........

5. (5pkt) Kostką do gry rzucono 7 razy. Prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wyrzuconych oczek jest parzysty wynosi ...., a tego, że wyrzucono wszystkie możliwe wartości oczek jest równy .... Wartość oczekiwana sumy wyrzuconych oczek jest równa ...., a wariancja sumy oczek wynosi ....

6. (5pkt) Zmienne X_1, X_2 są niezależne i mają rozkład normalny o średniej -1 i wariancji 4. Znajdź gęstość zmiennych losowych

   i) $Y = (X_1 - 2X_2)^2$, $g_Y(x) =$...........................

   ii) $Z = \min\{X_1, X_2\}$, $g_Z(x) =$...........................

7. (4pkt) W szufladzie znajduje się 100 monet - 90 symetrycznych i 10 asymetrycznych na których orzeł wypada trzy razy częściej niż reszka. Z pudełka wylosowano monetę i rzucono nią 3 razy. Prawdopodobieństwo tego, że
i) wypadła przynajmniej jedna reszka wynosi ....
ii) moneta jest sfałszowana, jeśli wypadły 3 orły wynosi ....

8. (2pkt) Podaj definicję niezależności rodziny σ-ciał $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$.