Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa

10 czerwca 2002

1. Klasę składającą się z 15 chłopców i 15 dziewczynek pogrupowano losowo w 15 par. Niech N oznacza liczbę par składających się z jednego chłopca i jednej dziewczynki. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej N.

2. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem λ. Oblicz $\mathbf{E}(X+Y|X)$, $\mathbf{E}((X+Y)^2|X)$ oraz $\mathbf{E}(X|X+Y)$.

3. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[1,2]$. Udowodnij, że ciąg
$$\frac{1}{n}\Big(\frac{X_1}{X_2} + \frac{X_2}{X_3} + \ldots + \frac{X_n}{X_{n+1}}\Big)$$
jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

4. Z talii 52 kartowej wylosowano 13 kart. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart
a) są reprezentowane wszystkie 13 wartości,
b) jest więcej kart czarnych niż czerwonych,
c) są po 4 karty w pewnych trzech kolorach i jedna w pozostałym,
d) brakuje karty w conajmniej jednym z czterech kolorów?

5. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Znajdź rozkłady zmiennych losowych $\max(X,Y)$ i $X-Y$.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takimi, że $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Udowodnij, że $\frac{1}{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ gdy $n \to \infty$.

7. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$
$$f(t) = Ee^{t(X+Y-2Z)^2} < \infty?$$
Oblicz $f(t)$.

8. Wykaż, że dla dowolnych rzeczywistych zmiennych losowych X_n, X i Y_n, Y oraz funkcji ciągłej $f : R^2 \to R$, jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ to $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X,Y)$.

9. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczej próbie wynosi p. Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach było tyle samo orłów co reszek. Wykaż, że
a) $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$ dla $p \neq \frac{1}{2}$;
b) $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$ dla $p = \frac{1}{2}$.

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10, do otrzymania oceny bardzo dobrej wystarczy poprawne rozwiązanie 7 zadań.