Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II

7 lutego 2022, grupa 1 (osoby z nazwiskami zaczynającymi się od liter A-Ł)

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich rozwiązania z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi. Odpowiedzi proszę przedstawiać w jak najprostszej postaci, niektóre z nich mogą wymagać użycia dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego Φ. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. Rozwiązanie każdego zadania w postaci pliku pdf proszę umieścić w stosownym folderze w moodle'u.

1. Zmienna X ma rozkład normalny o sredniej 0 i wariancji 7. Określmy $Y = \operatorname{sgn}(X)$, $Z = \mathbb{E}(X|Y)$ i $W = \mathbb{E}(Y|X)$. Znajdź funkcje charakterystyczne zmiennych X, Y, Z i W.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_k ma rozkład jednostajny na przedziale $[-3\sqrt{k}, 3\sqrt{k}]$. Czy ciągi
$$Y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \ \text{ oraz } \ Z_n := \min\{2X_1, Y_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
są zbieżne według rozkładu? W przypadku istnienia granicy badanego ciągu proszę wyznaczyć jej dystrybuantę.

3. Ciąg $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest podmartyngałem takim, że $\mathbb{E}\sup_n |M_n| < \infty$. Czy z tego wynika (proszę w każdym punkcie uzasadnić pozytywną odpowiedź albo wskazać kontrprzykład), że
i) M_n jest zbieżny p.n.,
ii) M_n jest zbieżny w L^1,
iii) M_n jest zbieżny w L^2.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{5}$. Określmy
$$S_0 = 4, \quad S_n = 4 + \sum_{k=1}^{n} X_k, \ n = 1, 2, \ldots$$
oraz
$$\tau := \inf\{n \geqslant 0 \colon\ |S_n| = 15\}.$$
i) Znaleźć $a \in \mathbb{R}$ takie, że zmienne $M_n = e^{3S_n - an} + e^{-3S_n - an}$, $n = 0, 1, \ldots$ tworzą martyngał względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
ii) Wykazać, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
iii) Obliczyć $\mathbb{E}e^{-a\tau}$, gdzie a jest liczbą z punktu i).

5. Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $E = \{1,2,3,4\}$ i macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Czy ten łańcuch jest nieprzywiedlny? Czy jest okresowy?
ii) Czy $(X_{2n})_{n\geqslant 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa? Jeśli tak, to ile wynosi jego macierz przejścia?
iii) Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{2022n} = 3 \mid X_0 = 1)$.

6. Rzucamy symetryczną monetą, dopóki nie wypadną 3 orły pod rząd lub 4 reszki pod rząd.
i) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że gra się zakończy wypadnięciem 3 orłów pod rząd?
ii) Ile wynosi wartość oczekiwana liczby wykonanych rzutów?

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II

7 lutego 2022, grupa 2 (osoby z nazwiskami zaczynającymi się od liter M-Ż)

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich rozwiązania z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi. Odpowiedzi proszę przedstawiać w jak najprostszej postaci, niektóre z nich mogą wymagać użycia dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego Φ. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. Rozwiązanie każdego zadania w postaci pliku pdf proszę umieścić w stosownym folderze w moodle'u.

1. Zmienna X ma rozkład normalny o sredniej 0 i wariancji 5. Określmy $Y = \mathrm{sgn}(X)$, $Z = \mathbb{E}(Y|X)$ i $W = \mathbb{E}(X|Y)$. Znajdź funkcje charakterystyczne zmiennych X, Y, Z i W.

2. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, przy czym X_k ma rozkład jednostajny na przedziale $[-2\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$. Czy ciągi
$$Y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{oraz} \quad Z_n := \min\{3X_1, Y_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$
są zbieżne według rozkładu? W przypadku istnienia granicy badanego ciągu proszę wyznaczyć jej dystrybuantę.

3. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{2}{7}$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{3}{7}$. Określmy
$$S_0 = 2, \quad S_n = 2 + \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n = 1, 2, \dots$$
oraz
$$\tau := \inf\{n \geqslant 0\colon\ |S_n| = 8\}.$$
i) Znaleźć $a \in \mathbb{R}$ takie, że zmienne $M_n = e^{5S_n - an} + e^{-5S_n - an}$, $n = 0, 1, \dots$ tworzą martyngał względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
ii) Wykazać, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
iii) Obliczyć $\mathbb{E}e^{-a\tau}$, gdzie a jest liczbą z punktu i).

4. Ciąg $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest nadmartyngałem takim, że $\mathbb{E}\sup_n |M_n| < \infty$. Czy z tego wynika (proszę w każdym punkcie uzasadnić pozytywną odpowiedź albo wskazać kontrprzykład), że
i) M_n jest zbieżny p.n.,
ii) M_n jest zbieżny w L^1,
iii) M_n jest zbieżny w L^2.

5. Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $E = \{1,2,3,4\}$ i macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Czy ten łańcuch jest nieprzywiedlny? Czy jest okresowy?
ii) Czy $(X_{2n})_{n\geqslant 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa? Jeśli tak, to ile wynosi jego macierz przejścia?
iii) Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{2022n} = 3 \mid X_0 = 1)$.

6. Rzucamy symetryczną monetą, dopóki nie wypadną 2 orły pod rząd lub 5 reszek pod rząd.
i) Jakie jest prawdopodobieństwo, że gra się zakończy wypadnięciem 2 orłów pod rząd?
ii) Ile wynosi wartość oczekiwana liczby wykonanych rzutów?