Imię i nazwisko:..................................................... Numer indeksu:........................

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II**
**grupa I, 5 lutego 2014**

**Część zadaniowa**

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Niech $S_n$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym startującym z 1.
   i) Znajdź liczbę $a > 0$ taką, że $M_n = a^n\Big(e^{2S_n} + e^{-2S_n}\Big)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $S_n$.
   ii) Dla wartości $a$ z punktu i) oblicz $\mathbb{E}a^\tau$, gdzie $\tau := \inf\{n\colon\ |S_n| = 5\}$.

2. Zmienne $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(X_n = \pm 2) = \frac{1}{2}$, zaś $Y_n$ ma rozkład wykładniczy ze średnią $n^{-1/2}$. Dla liczby rzeczywistej $t$ oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\sqrt{Y_i} \geqslant tn^{1/4}\Big).$$
   *Uwaga.* $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} = 2$.

3. Dla ustalonej liczby $p \in (0, 1)$ rozpatrzmy łańcuch Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ o przestrzeni stanów $E = \mathbb{Z}$ i macierzy przejścia takiej, że $p_{0,1} = p_{0,-1} = \frac{1}{2}$ oraz $p_{k,k+1} = p_{-k,-k-1} = p$, $p_{k,k-1} = p_{-k,-k+1} = 1 - p$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Niech $M_n = (\frac{1-p}{p})^{|X_n|}$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.
   a) Wykaż, że $(M_n, \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem dla $p \geqslant \frac{1}{2}$ i podmartyngałem dla $p \leqslant \frac{1}{2}$.
   b) Wykaż, że $M_n$ jest zbieżny prawie na pewno dla $p > \frac{1}{2}$. Ile wynosi jego granica?

4. Po wierzchołkach czworościanu ABCD porusza się pionek, w każdym ruchu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ przeskakując do jednego z sąsiadów. W chwili 0 pionek znajduje się w punkcie A. Oblicz
   i) prawdopodobieństwo tego, że pionek wróci do punktu A przed dotarciem do punktu D,
   ii) średni czas oczekiwania na powrót pionka do punktu A,
   iii) przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 krokach pionek będzie w punkcie A.

5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, symetryczne i mają wariancję 2. Określmy $M_n = \prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{X_i}{i})$.
   i) Znajdź filtrację dla której $M_n$ jest martyngałem.
   ii) Czy z założeń wynika zbieżność $M_n$ w $L^2$?
   iii) Czy z założeń wynika zbieżność $M_n$ prawie na pewno?

6. Znajdź wszystkie zmienne losowe $X$ takie, że jeśli $Y$ jest zmienną $\mathcal{N}(0, 1)$ niezależną od $X$, to $X + Y$ ma ten sam rozkład, co $\frac{1}{2}X + 3Y + 1$.

**Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!**

**Część testowa**

1. (2pkt) Co to znaczy, że wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma rozkład gaussowski (podaj jedną z definicji)?

2. (2pkt) Podaj kryterium powracalności (w języku macierzy przejścia) jednorodnego, nieprzywiedlnego łańcucha Markowa.

3. (4pkt) Zmienne $X$ i $Y$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2. Oblicz warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}((X-3Y)^2|X) =$
funkcję charakterystyczną $\varphi_{X-3Y}(t) =$

4. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności ciągu zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

5. (3pkt) Zmienne losowe $X_n$ spełniają warunek $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{itX_n} = \frac{5}{5-it}$ dla wszystkich $t$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(1 \leqslant X_n \leqslant 3) =$

6. (3pkt) Niech $X$ będzie zmienną losową. Wówczas rodzina zmiennych losowych $(e^{tX})_{t\geqslant 0}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy

7. (3pkt) Uzupełnij sformułowania nierówności maksymalnych Dooba dla martyngału $(M_n)_{n\geqslant 1}$.
i) Dla $t > 0$, $t\mathbb{P}(\max_n |M_n| \geqslant t) \leqslant$
ii) Dla $p > 1$, $\mathbb{E}\max_n |M_n|^p \leqslant$

8. (3pkt) Zmienna losowa $X$ ma skończone wszystkie momenty. Wyraź za pomocą funkcji charakterystycznej $X$ następujące wielkości:
$\mathbb{E}X =$
$\mathrm{Var}(X) =$
$\mathrm{Var}(X^2) =$

9. (3pkt) Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, gdzie niezależne zmienne $X_n$ mają rozkład jednostajny na $[0, 4]$. Wówczas zmienne losowe $S_n - f(n)$, $(S_n - g(n))^2 - h(n)$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez $X_n$, jeśli $f(n) =$ .........., $g(n) =$ .............. oraz $h(n) =$ ....................

Imię i nazwisko:...................................................... Numer indeksu:........................

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II**
**grupa II, 5 lutego 2014**

**Część zadaniowa**

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Niech $S_n$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym startującym z 2.
   i) Znajdź liczbę $a > 0$ taką, że $M_n = a^n\Big(e^{3S_n} + e^{-3S_n}\Big)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $S_n$.
   ii) Dla wartości $a$ z punktu i) oblicz $\mathbb{E}a^\tau$, gdzie $\tau := \inf\{n\colon\ |S_n| = 4\}$.

2. Zmienne $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(X_n = \pm 3) = \frac{1}{2}$, zaś $Y_n$ ma rozkład wykładniczy ze średnią $n^{-1/2}$. Dla liczby rzeczywistej $t$ oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\sqrt{Y_i} \geqslant tn^{1/4}\Big).$$
   *Uwaga.* $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} = 2$.

3. Dla ustalonej liczby $p \in (0, 1)$ rozpatrzmy łańcuch Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ o przestrzeni stanów $E = \mathbb{Z}$ i macierzy przejścia takiej, że $p_{0,1} = p_{0,-1} = \frac{1}{2}$ oraz $p_{k,k+1} = p_{-k,-k-1} = p$, $p_{k,k-1} = p_{-k,-k+1} = 1 - p$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Niech $M_n = (\frac{1-p}{p})^{|X_n|}$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.
   a) Wykaż, że $(M_n, \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem dla $p \geqslant \frac{1}{2}$ i podmartyngałem dla $p \leqslant \frac{1}{2}$.
   b) Wykaż, że $M_n$ jest zbieżny prawie na pewno dla $p > \frac{1}{2}$. Ile wynosi jego granica?

4. Po wierzchołkach czworościanu ABCD porusza się pionek, w każdym ruchu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ przeskakując do jednego z sąsiadów. W chwili 0 pionek znajduje się w punkcie A. Oblicz
   i) prawdopodobieństwo tego, że pionek wróci do punktu A przed dotarciem do punktu C,
   ii) średni czas oczekiwania na powrót pionka do punktu A,
   iii) przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 krokach pionek będzie w punkcie A.

5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, symetryczne i mają wariancję 3. Określmy $M_n = \prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{X_i}{i})$.
   i) Znajdź filtrację dla której $M_n$ jest martyngałem.
   ii) Czy z założeń wynika zbieżność $M_n$ w $L^2$?
   iii) Czy z założeń wynika zbieżność $M_n$ prawie na pewno?

6. Znajdź wszystkie zmienne losowe $X$ takie, że jeśli $Y$ jest zmienną $\mathcal{N}(0, 1)$ niezależną od $X$, to $X + Y$ ma ten sam rozkład, co $\frac{1}{3}X + 2Y - 1$.

**Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!**

**Część testowa**

1. (3pkt) Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, gdzie niezależne zmienne $X_n$ mają rozkład jednostajny na $[0, 2]$. Wówczas zmienne losowe $S_n - f(n)$, $(S_n - g(n))^2 - h(n)$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez $X_n$, jeśli $f(n) =$ .........., $g(n) =$ .............. oraz $h(n) =$ .....................

2. (2pkt) Podaj kryterium powracalności (w terminach macierzy przejścia) jednorodnego, nieprzywiedlnego łańcucha Markowa.

3. (3pkt) Zmienna losowa $X$ ma skończone wszystkie momenty. Wyraź za pomocą funkcji charakterystycznej $X$ następujące wielkości:
   $\mathbb{E}X =$
   $\mathrm{Var}(X) =$
   $\mathrm{Var}(X^2) =$

4. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności ciągu zmiennych losowych $(X_n)_{n \geqslant 1}$.

5. (3pkt) Niech $X$ będzie zmienną losową. Wówczas rodzina zmiennych losowych $(e^{tX})_{t \geqslant 0}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy

6. (4pkt) Zmienne $X$ i $Y$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Oblicz warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}((X + 2Y)^2 | X) =$
   funkcję charakterystyczną $\varphi_{X+2Y}(t) =$

7. (3pkt) Zmienne losowe $X_n$ spełniają warunek $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{itX_n} = \frac{3}{3-it}$ dla wszystkich $t$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(1 \leqslant X_n \leqslant 5) =$

8. (3pkt) Uzupełnij sformułowania nierówności maksymalnych Dooba dla martyngału $(M_n)_{n\geqslant 1}$.
   i) Dla $t > 0$, $t\mathbb{P}(\max_n |M_n| \geqslant t) \leqslant$
   ii) Dla $p > 1$, $\mathbb{E}\max_n |M_n|^p \leqslant$

9. (2pkt) Co to znaczy, że wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma rozkład gaussowski (podaj jedną z definicji)?