Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.........................

Egzamin z rachunku prawdopodobieństwa II*
9 lutego 2006

Część zadaniowa

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-7.

1. Po wierzchołkach $2n$-kąta foremnego $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A_1, a w kolejnych krokach z prawdopodobieństwem $1/2$ zmienia (w sposób niezależny od poprzednich ruchów) wierzchołek na jeden z sąsiednich. Oblicz
   a) prawdopodobieństwo, że pionek dotrze do A_n przed dotarciem do A_{n+1};
   b) wartość oczekiwaną liczby kroków do momentu powrotu do A_1.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na $[0, n^2]$. Niech $S_n := X_1 + \ldots + X_n, a_n := \mathbf{E} S_n, \sigma_n^2 := \mathrm{Var}(S_n)$. Czy ciąg zmiennych losowych $\frac{S_n - a_n}{\sigma_n}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

3. Niech $Z_1 = (X_1, Y_1), Z_2 = (X_2, Y_2), \ldots$ będą niezależnymi wektorami losowymi o standardowym rozkładzie gaussowskim na $\mathbb{R}^2$. Określmy
$$\tau := \inf\{n \colon Z_n \text{ leży w górnej półpłaszczyźnie}\}.$$
   Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $S = \sum_{j=1}^{\tau} X_j$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym zmienna X_n ma rozkład dwumianowy $\mathrm{Bin}(n, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \ldots$. Określmy ciąg zmiennych Y_n wzorem $Y_n = X_1 X_2 \ldots X_n$, $n = 1, 2, \ldots$.
   (a) Wykaż, że ciąg Y_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i że ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno.
   (b) Czy Y_n zbieżny w L^1?

5. Rozpatrzmy łańcuch Markowa na zbiorze liczb całkowitych z macierzą przejścia $P = (p_{xy})$ daną wzorem
$$p_{0,k} = \frac{1}{3} \text{ dla } k = -1, 0, 1,$$
$$p_{k,k-1} = q, \ p_{k,k+1} = p \text{ dla } k \leqslant -1,$$
$$p_{k,k-1} = p, \ p_{k,k+1} = q \text{ dla } k \geqslant 1,$$
   gdzie $q = 1 - p$ oraz $p \in (0, 1)$. Wykaż, że łańcuch jest nieprzywiedlny i nieokresowy. Dla jakich wartości p, łańcuch ten jest powracalny?

6. Niech $(W_t)_{t \geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, zaś $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leqslant t)$. Znajdź funkcję $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ taką, że
$$(e^{iW_t + f(t)}, \mathcal{F}_t) \text{ jest martyngałem.}$$

Część testowa

W poniższych zadaniach φ_X oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X.

1. (3pkt) Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Znajdź funkcję charakterystyczną $\varphi_{X-2Y}(t) =$

2. (2pkt) τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Podaj definicję σ-ciała $\mathcal{F}_\tau$

3. (3pkt) Które z następujących warunków implikują ciasność ciągu rozkładów $(\mu_{X_n})_{n\geqslant 1}$ (podkreśl właściwe odpowiedzi): $\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$; jednostajna całkowalność X_n; zbieżność X_n według rozkładu; punktowa zbieżność φ_{X_n}?

4. (3pkt) Zmienne nieujemne X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej X. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leqslant 1) = \mathbf{P}(X \leqslant 1)$; $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X$; $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}e^{-X_n} = \mathbf{E}e^{-X}$; zmienna X jest nieujemna.

5. (4pkt) Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0,3]$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wówczas $(S_n^2 + aS_n + b, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem, jeśli $a =$, $b =$.

6. (5pkt) Kostką sześcienną rzucamy dopóki nie wyrzucimy wszystkich nieparzystych oczek. Niech N oznacza liczbę rzutów, a S sumę wyrzuconych oczek. Wówczas $\mathbf{E}N =$ $\mathbf{E}S =$.

7. (3pkt) Które z następujących warunków implikują zbieżność prawie na pewno martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$ (podkreśl właściwe odpowiedzi): nieujemność X_n, $\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$, $\sup_n \mathbf{E}X_n < \infty$, zbieżność X_n w L^2.

8. (2pkt) Podaj jedną z definicji jednostajnej całkowalności rodziny zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$.

9. (3pkt) Symetryczne błądzenie losowe na prostej jest (podkreśl poprawne odpowiedzi) powracalne, nieokresowe, ma rozkład stacjonarny, w każdym stanie przebywa prawie na pewno nieskończenie wiele razy.

10. (4pkt) Pewien jednorodny łańcuch Markowa z dwuelementową przestrzenią stanów ma macierz przejścia $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & a \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Wówczas $a =$, macierz przejścia w dwu krokach tego łańcucha wynosi $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$, zaś rozkład stacjonarny $\pi = (\ , \ )$.

11. (3pkt) Podaj kryterium powracalności jednorodnego, nieprzywiedlnego łańcucha Markowa.