Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II*
5 lutego 2013

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać cztery** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i zadania.. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–10 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne X_n i Y_n są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem $5n$.
   a) Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-5/2}(X_n^3 - Y_n^3)$.
   b) Wyznacz wszystkie ciągi a_n takie, że $(a_n X_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciasny.

2. Niech $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb z przedziału $(0,1)$. Rozważmy łańcuch Markowa $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ o przestrzeni stanów $E = \{0,1,2,\ldots\}$ i macierzy przejścia danej wzorami $p_{n,0} = p_n$, $p_{n,n+1} = 1 - p_n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$.
   a) Czy jest to łańcuch nieprzywiedlny? Czy jest on okresowy?
   b) Dla jakich ciągów (p_n) łańcuch (X_n) jest powracający?
   c) Załóżmy, że $p_n = \frac{1}{2}$ dla wszystkich n. Oblicz dla $k, l \in E$,
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = l)$$

3. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną 2 orły pod rząd. Oblicz
   a) prawdopodobieństwo tego, że wyrzucimy w sumie parzystą liczbę orłów,
   b) wartość oczekiwaną liczby oddanych rzutów,
   c) wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych orłów.

4. Ciąg $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem o wyrazach całkowitych takim, że $M_0 = 1$, $|M_{n+1} - M_n| \leqslant 1$ dla $n = 0,1,2\ldots$ oraz $\limsup M_n = \infty$ p.n.. Określmy
   $$\tau := \inf\{n \geqslant 0\colon\ M_n = 10\} \quad \text{oraz} \quad \sigma := \inf\{n \geqslant 0\colon\ |M_n| = 10\}.$$
   a) Oblicz $\mathbb{P}(\tau = \sigma)$.
   b) Wykaż, że jeśli $N_n = M_n$ dla $n \leqslant \tau$ i $N_n = 20 - M_n$ dla $n \geqslant \tau$, to N_n też jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1,1]$. Określmy $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ i $\tau := \inf\{n \geqslant 1\colon\ X_n \geqslant 0\}$. Oblicz
   a) $\mathbb{E}\tau$ i $\mathbb{E}S_\tau$,
   b) funkcję charakterystyczną zmiennej S_τ.

Część testowa

1. (4pkt) Niech X_n będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1,2,3\}$ i macierzy przejścia $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, zaś π będzie rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha. Oblicz
   $\mathbb{P}(X_2 = X_1 | X_0 = 1)=$
   $(\pi(\{1\}), \pi(\{2\}), \pi(\{3\})) =$

2. (3pkt) Sformułuj twierdzenie o zbieżności martyngałów w L_2.

3. (4pkt) Zmienne X_n są niezależne i zbiegają według rozkładu do rozkładu normalnego $\mathcal{N}(1,1)$. Oblicz
i) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant 0) =$
ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n + X_{n+1} \leqslant 0) =$
iii) $\lim_{n\to\infty} \varphi_{2X_n - X_{n+1}}(t) =$

4. (3pkt) Załóżmy, że $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, gdzie X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Wówczas ciąg e^{na-S_n} jest nadmartyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne X_n wtedy i tylko wtedy, gdy

5. (4pkt) Zmienna losowa X ma skończone wszystkie momenty. Wyraź za pomocą funkcji charakterystycznej X następujące wielkości:
$\mathbb{E}X =$.....
$\mathrm{Var}(X) =$......
$\mathrm{Var}(X^2) =$.....

6. (3pkt) Co to znaczy, że wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma rozkład gaussowski (podaj jedną z definicji)?

7. (3pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ względem filtracji $\mathcal{F}_n$ i sigma-ciała $\mathcal{F}_\tau$.

8. (3pkt) Które z następujących warunków implikują jednostajną całkowalność zmiennych X_n (podkreśl właściwe odpowiedzi): ciasność ciągu rozkładów μ_{X_n}; zbieżność X_n prawie na pewno; zbieżność X_n w L^1; $\mathbb{E}\sup_n |X_n| < \infty$.

9. (3pkt) Sformułuj Centralne Twierdzenie Graniczne Lindeberga-Levy'ego.