Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II*
grupa I, 31 stycznia 2009

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązanie. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt.

1. Zmienne losowe X_n spełniają warunek $\sup_n \mathbf{E}e^{|X_n|} < \infty$. Wykaż, że X_n zbiega według rozkładu do X wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n^k = \mathbf{E}X^k$ dla $k = 0, 1, 2 \ldots$.

2. Rzucamy kostką dopóki nie wypadną 3 szóstki pod rząd. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów i sumy wyrzuconych oczek.

3. Niech $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$, gdzie X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^2.
   a) Znajdź taki niezerowy ciąg (a_n), że $(a_n Y_n)_{n\geqslant 1}$ jest martyngałem względem sigma ciała generowanego przez (X_n).
   b) Czy martyngał z punktu a) jest zbieżny prawie na pewno?
   c) Czy jest zbieżny w L^1?

4. Zmienne $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Czy ciąg
$$T_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k Y_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n Y_k^2}}$$
   jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

5. Niech
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t = 0 \\ \frac{1-e^{-20t^2}}{20(1-e^{-t^2})} & \text{dla } t \neq 0 \end{cases}$$
   Wykaż, że istnieje zmienna losowa X taka, że $\varphi = \varphi_X$. Znajdź rozkład X.

6. Dany ustalonej liczby $p \in (0, 1)$ rozpatrzmy łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $E = \mathbb{Z}$ i macierzy przejścia takiej, że $p_{0,1} = p_{0,-1} = 1/2$ oraz $p_{k,k+1} = p_{-k,-k-1} = p$, $p_{k,k-1} = p_{-k,-k+1} = 1 - p$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Zbadaj powracalność tego łańcucha Markowa.

Część testowa

1. (3pkt) Sformułuj Centralne Twierdzenie Graniczne Lindeberga-Levy'ego.

2. (2pkt) Uzupełnij stwierdzenie: Zmienne X_n mają rozkład jednostajny na $[a_n, b_n]$. Wówczas ciąg X_n jest ciasny wtedy i tylko wtedy gdy ....

3. (3pkt) Niech $X_n = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n)$, gdzie X jest pewną zmienną o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ a $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ pewną filtracją. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): Ciąg X_n zbiega do X w L^1, ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno, ciąg X_n jest zbieżny według rozkładu, ciąg (X_n^2) jest jednostajnie całkowalny.

4. (4pkt) Podaj wybrane dwie równoważne definicje wielowymiarowej zmiennej gaussowskiej.

5. (4pkt) $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera. Wówczas dla $0 < s < t$
$\mathbf{E}(W_t W_s) =$.................
$\mathbf{E}(W_t^2 W_s^2) =$...........
$\mathbf{E}e^{5i(W_t - W_s)} =$.........

6. (4pkt) Zmienna losowa X ma skończone wszystkie momenty. Wyraź za pomocą funkcji charakterystycznej X następujące wielkości:
$\mathbf{E}X =$.....
$\mathrm{Var}(X) =$......
$\mathrm{Var}(X^2) =$.....

7. (4pkt) Niech X_n będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1,2\}$ i macierzy przejścia $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$. Oblicz
$\mathbf{P}(X_2 = X_1 | X_0 = 1)$=......
$\lim_{n\to\infty} P^n =$............

8. (3pkt) $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest nieujemnym martyngałem takim, że $M_0 = 1$, a τ skończonym momentem zatrzymania. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): $\mathbf{E}M_\tau = 1$, $\mathbf{E}M_{\tau\wedge 100} = 1$, $\mathbf{E}M_\tau^2 \geqslant 1$, $\mathbf{E}\sqrt{M_\tau} \leqslant 1$.

9. (3pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ względem filtracji $\mathcal{F}_n$ oraz sigma ciała $\mathcal{F}_\tau$.

Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II*
grupa II, 31 stycznia 2009

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązanie. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt.

1. Niech $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$, gdzie X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^3.
   a) Znajdź taki niezerowy ciąg (a_n), że $(a_n Y_n)_{n\geqslant 1}$ jest martyngałem względem sigma ciała generowanego przez (X_n).
   b) Czy martyngał z punktu a) jest zbieżny prawie na pewno?
   c) Czy jest zbieżny w L^1?

2. Niech
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t = 0 \\ \frac{1-e^{-20t^2}}{10(1-e^{-2t^2})} & \text{dla } t \neq 0 \end{cases}$$
   Wykaż, że istnieje zmienna losowa X taka, że $\varphi = \varphi_X$. Znajdź rozkład X.

3. Dany ustalonej liczby $p \in (0,1)$ rozpatrzmy łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $E = \mathbb{Z}$ i macierzy przejścia takiej, że $p_{0,1} = p_{0,-1} = 1/2$ oraz $p_{k,k+1} = p_{-k,-k-1} = p$, $p_{k,k-1} = p_{-k,-k+1} = 1-p$ dla $k = 1,2,\ldots$. Zbadaj powracalność tego łańcucha Markowa.

4. Rzucamy kostką dopóki nie wypadną 3 jedynki pod rząd. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów i sumy wyrzuconych oczek.

5. Zmienne $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-2,2]$. Czy ciąg
$$T_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k Y_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n Y_k^2}}$$
   jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Zmienne losowe X_n spełniają warunek $\sup_n \mathbf{E} e^{|X_n|} < \infty$. Wykaż, że X_n zbiega według rozkładu do X wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} X_n^k = \mathbf{E} X^k$ dla $k = 0,1,2\ldots$.

Część testowa

1. (3pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ względem filtracji $\mathcal{F}_n$ oraz sigma ciała $\mathcal{F}_\tau$.

2. (4pkt) $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera. Wówczas dla $0 < s < t$
   $\mathbf{E}e^{3i(W_t-W_s)}$ =.........
   $\mathbf{E}(W_tW_s)$ =.................
   $\mathbf{E}(W_t^2W_s^2)$ =...........

3. (3pkt) Sformułuj Centralne Twierdzenie Graniczne Lindeberga-Levy'ego.

4. (3pkt) $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest nieujemnym martyngałem takim, że $M_0 = 1$, a τ skończonym momentem zatrzymania. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): $\mathbf{E}M_\tau^2 \geqslant 1$, $\mathbf{E}M_\tau = 1$, $\mathbf{E}M_{\tau\wedge 100} = 1$, $\mathbf{E}\sqrt{M_\tau} \leqslant 1$.

5. (2pkt) Uzupełnij stwierdzenie: Zmienne X_n mają rozkład jednostajny na $[a_n, b_n]$. Wówczas ciąg X_n jest ciasny wtedy i tylko wtedy gdy ....

6. (3pkt) Niech $X_n = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n)$, gdzie X jest pewną zmienną o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ a $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ pewną filtracją. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): Ciąg X_n jest zbieżny w L^1, ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno do X, ciąg X_n jest zbieżny według rozkładu, ciąg (X_n^2) jest jednostajnie całkowalny.

7. (4pkt) Zmienna losowa X ma skończone wszystkie momenty. Wyraź za pomocą funkcji charakterystycznej X następujące wielkości:
   $\mathbf{E}X$ =.....
   $\mathrm{Var}(X)$ =......
   $\mathrm{Var}(X^2)$ =.....

8. (4pkt) Niech X_n będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1,2\}$ i macierzy przejścia $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$. Oblicz
   $\mathbf{P}(X_2 = X_1|X_0 = 1)$=......
   $\lim_{n\to\infty} P^n$ =............

9. (4pkt) Podaj wybrane dwie równoważne definicje wielowymiarowej zmiennej gaussowskiej.