Imię i nazwisko:... Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II*, grupa I, 1 lutego 2024

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych.

1. Zmienne X_n są nieujemne oraz
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\cos(tX_n) = e^{-2t^2} \text{ dla wszystkich } t \in \mathbb{R}.$$
i) Czy wynika stąd ciasność X_n?
ii) Czy wynika stąd istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$. Jeśli tak, to ile ona wynosi?
iii) Czy odpowiedzi na pytania i) i ii) się zmienią, jeśli nie założymy nieujemności X_n?

2. Zmienne $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 5. Niech
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}(X_k - 1).$$
Znajdź ciąg liczbowy a_n taki, że ciąg zmiennych losowych $Y_n = \ln(1 + |S_n|) - a_n$ jest zbieżny według rozkładu. Wyznacz granicę Y_n dla znalezionego ciągu a_n.

3. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$, startującym z zera. Określmy $\tau = \inf\{n\colon\ S_n = 5\}$ i połóżmy $T_n = 2S_n$ dla $n \leqslant \tau$ i $T_n = 25 - 3S_n$ dla $n \geqslant \tau$. Wykaż, że T_n jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.

4. Zmienne losowe M_n przyjmują wartości całkowite, $M_0 = 4$, $|M_n - M_{n-1}| \leqslant 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz ciągi M_n oraz $M_n^2 - \frac{1}{20}n$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez M_n. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 1\colon |M_n| = 10\}$.
i) Wykaż, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ i oblicz $\mathbb{E}\tau$.
ii) Znajdź rozkład M_τ.

5. Rzucamy kostką do momentu wyrzucenia trzech piątek pod rząd. Znajdź wartość oczekiwaną
i) liczby wykonanych rzutów,
ii) sumy wyrzuconych oczek,
iii) liczby wyrzuconych piątek.

6. Niech S_n oznacza symetryczne błądzenie losowe po $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ z odbiciem w punktach końcowych, startujące z 10. Oblicz
i) prawdopodobieństwo tego, że wrócimy do 10 przed dojściem do jednego z końców odcinka (tzn. do 0 lub 100),
ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{2n+2} = X_{2n} - 2)$.

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (20pkt)

1. (2pkt) Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają średnią 4 i wariancję 2. Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Wówczas $(S_n - an)^2 - bn$ jest **podmartyngałem** względem naturalnej filtracji wtedy i tylko wtedy, gdy ....

2. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności rodziny zmiennych losowych $(X_i)_{i \in I}$.

3. (2pkt) Dwuwymiarowy wektor losowy $X = (X_1, X_2)$ ma rozkład jednostajny na prostokącie $[0,3] \times [-5,5]$. Wówczas funkcja charakterystyczna X wynosi $\varphi_X(t_1, t_2) =$.........

4. (4pkt) Wektor losowy (X_1, X_2, X_3) ma rozkład gaussowski o średniej 0 i macierzy kowariancji $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
   i) Wówczas $\varphi_{X_1 - X_2 + 2X_3}(t) =$
   ii) Zmienne X_1 oraz $aX_2 + bX_3$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy ....
   iii) $\mathbb{E}(X_1 | (X_2, X_3)) =$

5. (2pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ oraz σ-ciała $\mathcal{F}_\tau$.

6. (2pkt) Uzupełnij sformułowanie nierówności maksymalnej Dooba dla martyngału M_n:
$$\mathbb{E} \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |M_k|^p \leqslant \text{.................................. dla } p\text{...........}$$

7. (2pkt) Łańcuch Markowa (X_n) ma macierz przejścia $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Wówczas $a =$......... oraz macierz przejścia w trzech krokach dla tego łańcucha wynosi $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

8. (2pkt) Podaj definicje nieprzywiedlności łańcucha Markowa o przestrzeni stanów E oraz powracalności stanu $x \in E$.

9. (2pkt) Podaj trzy warunki równoważne zbieżności martyngałów w L^4.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II*, grupa II, 1 lutego 2024

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych.

1. Zmienne X_n są nieujemne oraz
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\cos(tX_n) = e^{-t^2/4} \text{ dla wszystkich } t \in \mathbb{R}.$$
i) Czy wynika stąd ciasność X_n?
ii) Czy wynika stąd istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 5)$. Jeśli tak, to ile ona wynosi?
iii) Czy odpowiedzi na pytania i) i ii) się zmienią, jeśli nie założymy nieujemności X_n?

2. Zmienne $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Niech
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}(X_k - 1).$$
Znajdź ciąg liczbowy a_n taki, że ciąg zmiennych losowych $Y_n = \ln(1 + |S_n|) - a_n$ jest zbieżny według rozkładu. Wyznacz granicę Y_n dla znalezionego ciągu a_n.

3. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$, startującym z zera. Określmy $\tau = \inf\{n\colon\ S_n = 4\}$ i połóżmy $T_n = 3S_n$ dla $n \leqslant \tau$ i $T_n = 20 - 2S_n$ dla $n \geqslant \tau$. Wykaż, że T_n jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.

4. Zmienne losowe M_n przyjmują wartości całkowite, $M_0 = -1$, $|M_n - M_{n-1}| \leqslant 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz ciągi M_n oraz $M_n^2 - \frac{1}{10}n$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez M_n. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 1\colon |M_n| = 20\}$.
i) Wykaż, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ i oblicz $\mathbb{E}\tau$.
ii) Znajdź rozkład M_τ.

5. Rzucamy kostką do momentu wyrzucenia trzech jedynek pod rząd. Znajdź wartość oczekiwaną
i) liczby wykonanych rzutów,
ii) sumy wyrzuconych oczek,
iii) liczby wyrzuconych jedynek.

6. Niech S_n oznacza symetryczne błądzenie losowe po $\{0, 1, 2, \ldots, 50\}$ z odbiciem w punktach końcowych, startujące z 20. Oblicz
i) prawdopodobieństwo tego, że wrócimy do 20 przed dojściem do jednego z końców odcinka (tzn. do 0 lub 50),
ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{2n+2} = X_{2n} + 2)$.

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (20pkt)

1. (2pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ oraz σ-ciała $\mathcal{F}_\tau$.

2. (2pkt) Dwuwymiarowy wektor losowy $X=(X_1,X_2)$ ma rozkład jednostajny na prostokącie $[-3,3]\times[0,5]$. Wówczas funkcja charakterystyczna X wynosi $\varphi_X(t_1,t_2)=$.........

3. (4pkt) Wektor losowy (X_1,X_2,X_3) ma rozkład gaussowski o średniej 0 i macierzy kowariancji $P=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.
   i) Wówczas $\varphi_{X_1+2X_2-X_3}(t)=$
   ii) Zmienne X_3 oraz aX_1+bX_2 są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy ....
   iii) $\mathbb{E}(X_3|(X_1,X_2))=$

4. (2pkt) Zmienne losowe $X_1,X_2,\ldots$ są niezależne i mają średnią 6 i wariancję 3. Niech $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$. Wówczas $(S_n-an)^2-bn$ jest **nadmartyngałem** względem naturalnej filtracji wtedy i tylko wtedy, gdy ....

5. (2pkt) Uzupełnij sformułowanie nierówności maksymalnej Dooba dla martyngału M_n:
$$\mathbb{E}\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|M_k|^p\leqslant \text{.................................. dla } p\text{...........}$$

6. (2pkt) Podaj trzy warunki równoważne zbieżności martyngałów w L^6.

7. (2pkt) Podaj definicje nieprzywiedlności łańcucha Markowa o przestrzeni stanów E oraz powracalności stanu $x\in E$.

8. (2pkt) Łańcuch Markowa (X_n) ma macierz przejścia $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Wówczas $a=$......... oraz macierz przejścia w trzech krokach dla tego łańcucha wynosi $\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

9. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności rodziny zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$.